15.11.06

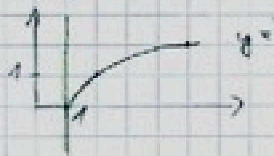
z.B. ist f an der Stelle 2 differenzierbar mit Ableitung

$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$

f ist auch an der Stelle 5 differenzierbar mit

$f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4}$. Wo ist f differenzierbar? Die Ableitungsfunktion hat die Definitionsmenge $(1,\infty)$. Dort ist f differenzierbar.

Die ursprüngliche Fkt f hat die Definitionsmenge $[1,\infty)$. Was passiert an der Stelle 1?



Näherungsgerade ist keine Fkt (senkrechte Tangente nicht erlaubt)

21.11.06

Ableitung von f an der Stelle a:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ Differenzenquotient

(setze $h = x-a$)

andere Schreibweisen

$f'(a) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(a)$ $\quad \frac{d}{dx}$ „d nach dx" Ableitungsoperator

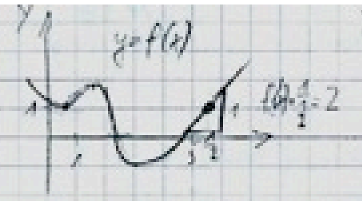
Bedeutung: „Die Ableitung nach der Variablen x von ..."

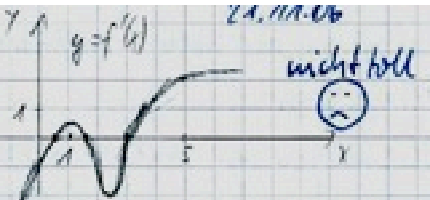
Wenn dieser Grenzwert existiert, dann heißt f differenzierbar an der Stelle a.

Die Ableitung (eine Zahl!) beschreibt die Steigung des Fktsgraphen von f an der Stelle a bzw. die Steigung der Tangente, also der Geraden, die die Fkt in einer Umgebung von a in „guter Näherung" darstellt.

Man kann versuchen, an jeder Stelle, an der f definiert ist, die Ableitung zu bilden. Das führt auf die Ableitungsfkt $f': x \mapsto f'(x)$, wobei der Definitionsbereich von f' aus allen x besteht, in denen f differenzierbar ist.

21.11.06





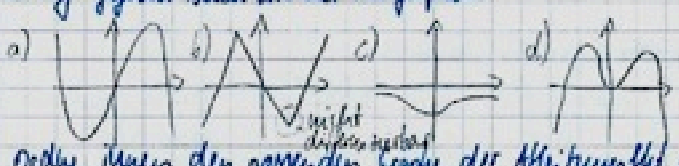
Bsp: Berechne f' für $f(x)=\frac{1-x}{2+x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\frac{1-x}{2+x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1-x-h)(2+x)}{(2+x+h)(2+x)}-\frac{(1-x)(2+x+h)}{(2+x)(2+x+h)}}{h}$$

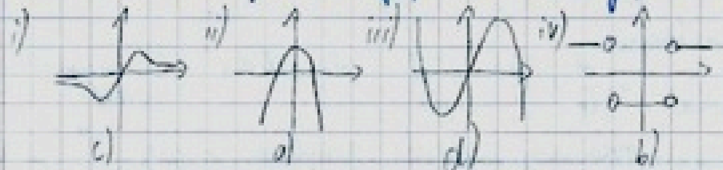
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2-2x-2h+x-x^2-hx)-(2+x+h-2x-x^2-xh)}{(2+x+h)(2+x)\cdot h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{(2+x+h)(2+x)\cdot h}$$

$$=\frac{-3}{(2+x+0)(2+x)}=\frac{-3}{(2+x)^2}$$

Übung: Gegeben seien die vier Fktsgraphen



Ordne ihnen den passenden Graphen der Ableitungsfkt zu:



Bisher: Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten berechnet (Das müssen wir können!)

Zur Berechnung von Ableitungen verwendet man in der Praxis natürlich die sogenannten Ableitungsregeln

Ableitung einer Konstanten:

$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$ andere Symbolik $\boxed{\frac{d}{dx}c=0}$ $c'=0$

lies: „Die Ableitung nach x von c ist 0."

$\frac{d}{dx}$ „Leibniz-Notation"

Ableitung einer Potenz

$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ $\frac{d}{dx}(x^n)=n\cdot x^{n-1}$

auch: $\frac{d}{dx}(x^{\pi})=\pi x^{\pi-1}$

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \quad \text{bzw.} \ (f+g)' = f' + g'$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) \quad \text{bzw.} \ (f-g)' = f' - g'$$