

Hausaufgaben für LL-07, Mathematik 2 zum 09.05.2008

Wegen des Feier- und Brückentags ist der Abgabetermin erst in zwei Wochen. Dementsprechend sind es auch mehr Aufgaben. Das Aufgabenblatt besteht aus zwei Seiten.

Aufgabe 1

Lesen Sie Abschnitt 12.2 *Series*. Allgemeiner Tipp: Um ein besseres Gefühl für unendliche Reihen zu bekommen, sollten Sie regelmäßig Tabellen wie auf Seite 750 oben links erstellen. Noch besser: Ergänzen sie eine Spalte mit den Summanden a_n . Damit werden Sie sich u.a. daran gewöhnen, dass die Summandenfolge gegen 0 konvergieren muss, damit die Reihe konvergiert (vgl. Divergenzkriterium).

Beispiel 4 ist ein schönes Beispiel zur Anwendung der Formel für die geometrische Reihe. Ganz zu Beginn der Vorlesung Mathe 1 hatten wir noch mit schriftlicher Division mühsam nachgewiesen, dass periodische Dezimalzahlen sich als Brüche schreiben lassen. Hier kann man direkt in eine Formel einsetzen.

Theorem 8 enthält wichtige Rechenregeln für unendliche Reihen. Der nachfolgende Beweis ist auch für uns verständlich, da er nur einfache Regeln für Summen und Grenzwerte verwendet.

Bearbeiten Sie die Aufgaben 4, 6 und 8 sowie die geraden Aufgaben 12 bis 40.

Aufgabe 2

Lesen Sie Abschnitt 12.3 *The Integral Test and Estimates of Sums*. Der Begriff der p -series (p -Reihe) ist sehr nützlich. Formel 1 (im roten Kasten auf Seite 761) sollte man auswendig lernen.

Teil (b) von Beispiel 5 ist wichtig und wurde so in der Vorlesung nicht angesprochen. Beachten Sie auch, wie in Beispiel 6 eine verbesserte Untergrenze im Vergleich zur Vorlesung mit Hilfe des Integrals ermittelt wird.

Den Beweis zum Integralkriterium am Ende des Abschnitts können Sie überspringen.

Bearbeiten Sie die geraden Aufgaben 2 bis 24.

Aufgabe 3

Lesen Sie Abschnitt 12.4 *The Comparison Tests*. Die Vergleichstests auf Seite 767 (auch: Majoranten- und Minorantenkriterium) sind vollkommen analog zu denen für uneigentliche Integrale, die wir bereits gesehen haben.

Sie können den *Limit Comparison Test*, seinen Beweis sowie die Beispiele 3 und 4 überspringen.

Der Unterabschnitt *Estimating Sums* ist für die praktischen Anwendungen von Reihen besonders wichtig. Wir müssen schrittweise lernen, wie man mit Reihen Näherungswerte berechnet. Hier geht es darum, wie man die Summen von Reihen näherungsweise berechnet.

Schauen Sie sich Aufgabe 37 (siebenunddreißig) an. Hier wird nun exakt geklärt, was eine unendliche Dezimaldarstellung ist. (Dazu ist keine Abgabe erforderlich.)

Bearbeiten Sie Aufgaben 34 und 36.

Aufgabe 4

Lesen Sie Abschnitt 12.5 *Alternating Series*.

Beachten Sie, dass bei den vorgehenden Themen - Integraltest, Vergleichstest - die Reihen nur positive Summanden haben durften. Nun kommt ein regelmäßiges Minuszeichen hinzu.

Den Beweis zum *Alternating Series Test* (im Deutschen auch: Leibniz-Test) können Sie überspringen. Der Unterabschnitt *Estimating Sums* hingegen ist besonders wichtig.

Rechenaufgaben: Es gilt für alle reellen Zahlen x die Reihendarstellung

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- Berechnen Sie $\sin 0,5$ mit vier Nachkommastellen Genauigkeit mit Hilfe der obigen Reihe. Wie viele Summanden müssen dazu aufaddiert werden? Dokumentieren Sie Ihre Rechnung durch eine Tabelle mit den drei Spalten n , $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- (sehr wichtig) Erstellen Sie mit dem Taschenrechner eine Tabelle mit den Spalten n , a_n , s_n zur obigen Reihe für $x = 11$. Welches Genauigkeitsproblem ergibt sich bei der Rechnung?
- Wie kann man $\sin 11$ mit Hilfe der obigen Reihe effizienter berechnen?