Hausaufgaben für LL-08, Statistik zum 20.5.2009

Aufgabe 1

Lesen Sie Abschnitt 3.6 *Erwartungswert und Varianz einer Verteilung.*

Zu Definition und Satz 3.9: Die Notation suggeriert, dass es sich um die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen handelt. Eine analoge Aussage gilt auch für diskrete Zufallsvariablen; vgl. Verteilungen zum einfachen bzw. zweifachen Würfelwurf aus der Vorlesung.

Satz 3.12 ist nicht selbstverständlich: Betrachten Sie eine gleichverteilte Zufallsvariable X mit den Werten -2, -1, 0, 1, 2. Welche Werte kann die Zufallsvariable $Y = X^2$ annehmen? Welche Wahrscheinlichkeiten gehören zu diesen Werten? Berechnen Sie den Erwartungswert von Y mit Hilfe einer Tabelle, in deren erster Spalte die Werte von Y stehen. Quizfrage: Warum gilt $E[X^2] = E[X] \cdot E[X]$ im Allgemeinen nicht? In welchen (uninteressanten) Fällen gilt diese Aussage trotzdem? Tipp: Formel (3.48).

Anregung zu Beispiel 3.32: Im DIN-Taschenbuch 303 (Bibliotheks-Signatur 1WBM 1(1)-303) findet sich auf den Seiten 93 – 202 der *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen.* Der Unterpunkt 4.3.7 auf Seite 112 behandelt ein ähnliches Beispiel.

Satz über Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels 3.17: Man stelle sich vor, dass die Zufallsvariablen einen Messfehler beschreiben. Dann geben die Formeln an, dass der Mittelwert von unabhängigen Mehrfachmessungen eine größere Genauigkeit besitzt. Man beachte, dass bei der Genauigkeitsangabe die Standardabweichung verwendet wird, nicht die Varianz. Also führen 100 unabhängige Messwiederholungen „nur“ zu einer 10-fach höheren Genauigkeit.

In dem Gesetz der großen Zahlen steckt unsere Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit drin. Sei dazu X_i die Zufallsvariable, die zählt, ob ein Ereignis A im i-ten Versuch eines Zufallsexperiments eintritt. Es besagt dann, dass sich die relative Häufigkeit für das Eintreten von A, nämlich $\bar{X}$, der Wahrscheinlichkeit $P(A) = \mu$ annähern [Nachdenken, dass in diesem Setting der Erwartungswert tatsächlich die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist]. Die merkwürdig anmutende Grenzwertbildung bei der Wahrscheinlichkeit ist notwendig, weil es immer wieder zu Abweichungen kommen kann - sie werden aber immer unwahrscheinlicher.

Bearbeiten Sie die Aufgaben 3.22 – 3.26.

Aufgabe 2

Lesen Sie Seite 61 (Herleitung der Formeln für die lineare Regression). Vgl. auch *Calculus*, S. 999, Aufgabe 53. Im Statistik-Buch wird nur gezeigt, dass es sich um einen kritischen Punkt handelt. Zeigen Sie auch, dass das Zweite Ableitungskriterium ein Minimum bestätigt.

Wenden Sie zur Übung die Cramersche Regel an, um b aus dem linearen Gleichungssystem (2.69) und (2.71) zu berechnen. Das Ergebnis sollte natürlich mit (2.72) übereinstimmen.