HM
21/09/06

· Dr. (USA) Achim Kehrein
· Klausur ohne Hilfsmittel

(1)

http://www.tfh-wildau.de/akehrein/index.html
· Papula Band 3 evtl. Band 2

Vektoranalysis
Ebene und räumliche Kurven

· bisher: reellwertige Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher

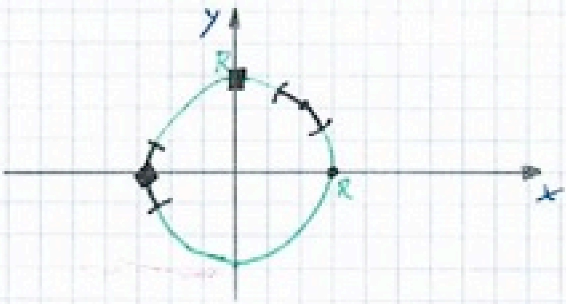
▶ Eine vektorwertige Funktion hat die Gestalt

$$D \to \mathbb{R}^n; \quad t \mapsto \begin{matrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{matrix},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}$.

Die Definitionsmenge D ist oft ein Intervall. Für $n=2$ kann man eine solche Funktion oft als Parametrisierung einer ebenen Kurve interpretieren. Für $n=3$, als Parametrisierung einer räumlichen Kurve.

Bsp.:



Kreisgleichung $x^2+y^2=R^2$
„ebene Kurve": Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$, so dass die Umgebung eines jeden Punktes wie ein „verbogenes" Intervall aussieht.

Folgende vektorwertige Funktion parametrisiert den Kreis:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

Wertetabelle:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π		2π
$x(t)$ / $y(t)$	$\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

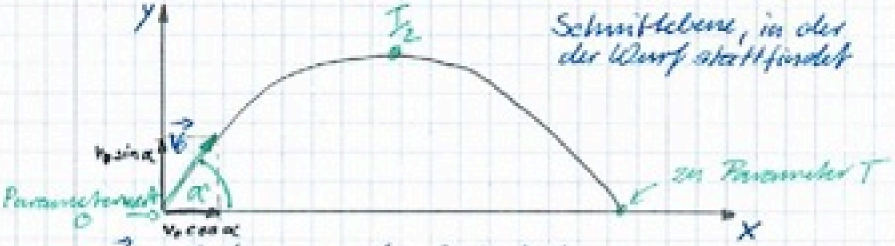
Anschaulich:
1. Wir wickeln die reelle Zahlengerade auf

...den Kreis ab

HM
21/09/06
2

2. Es wird eine Bewegung auf der Kurve beschrieben. Dann interpretiert man den Parameter t als Zeit.

Bsp.: „schiefer Wurf"



$\vec{v}_0$: Anfangsgeschwindigkeit
α: Winkel zwischen Wurfrichtung und Horizontalen.

Eingeführte Größen hinreichend definieren!

$x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t$ horizontale Bewegungskomponente

$y(t) = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2$ vertikale Bewegungskomponente

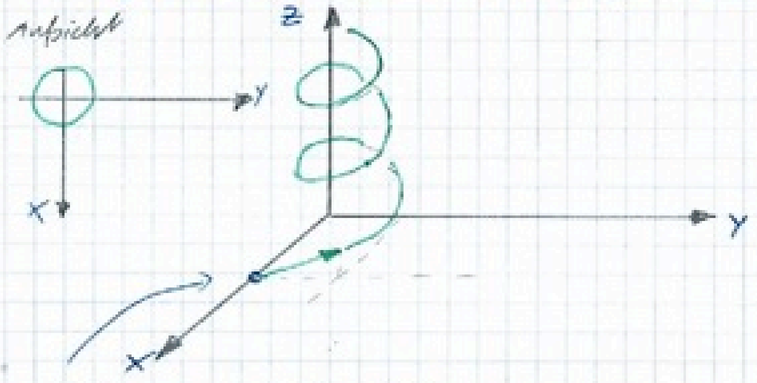
Verwendung einer vektorwertigen Funktion

$[0, T] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

dabei ist $g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ und T die Zeit, zu der der Ball wieder auf den Boden trifft.

Bsp.: Elektron im Magnetfeld
homogenes Magnetfeld (Richtung: nach oben)



Elektron zum Zeitpunkt 0

Beschreibung der Bahnkurve durch vektorwertige Funktion

HM
21/09/06
3

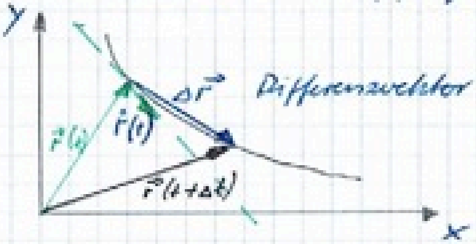
$[0,\infty) \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ v\cdot t \end{pmatrix}$$

Parametrisierung einer räumlichen Kurve

Differentiation von vektorwertigen Funktion

Motivation: ebene Kurve in Parameterdarstellung $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =: \vec{r}(t)$ Ortsvektor



Differenzvektor „Sehnenvektor"

Betrachte Vektor

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\cdot\Delta\vec{r} \quad \text{(skalare Multiplikation)}$$

Grenzübergang liefert (im Falle der Existenz des Grenzwerts) einen Tangentenvektor

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\begin{pmatrix} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$\dot{\vec{r}}(t)$ ist (im Falle der Existenz) der Tangentenvektor. (auch $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$)

Bsp.:

- $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$; $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cdot\cos t \\ t\cdot\sin t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

HM
21/09/06
4

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t)\cdot 2 \\ 1 \\ \cos(2t)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(2t)\cdot 2\cdot 2 \\ 0 \\ -\sin(2t)\, 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

Rechenregel

Seien $\vec{a} = \vec{a}(t)$ und $\vec{b} = \vec{b}(t)$ vektorwertige Funktionen ~~und~~ mit der selben Komponentenanzahl und $\varphi = \varphi(t)$ eine reellwertige Funktion.

- $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t) + \vec{b}(t)\right) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)\right) = \left[\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\right]\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\left[\frac{d}{dt}\vec{b}(t)\right]$
- $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right) = \left[\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\right]\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\left[\frac{d}{dt}\vec{b}(t)\right]$ (nur sinnvoll in $\mathbb{R}^3$)
- $\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)\cdot\vec{a}(t)\right) = \left[\frac{d}{dt}\varphi(t)\right]\cdot\vec{a}(t) + \varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\right]$

ausführlicher:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix};\quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a_1(t)\,b_1(t) + a_2(t)\,b_2(t)\right) = \left[\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}\left[\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}\right]$$

Produktregel wie bisher

$$= \dot{a}_1(t)\cdot b_1(t) + \dot{a}_2(t)\cdot b_2(t) + a_1(t)\,\dot{b}_1(t) + a_2(t)\cdot\dot{b}_2(t)$$