Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Determinanten von $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Es sei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix. Berechnen Sie die Determinanten von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - \lambda\, E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von λ gilt $\det(A - \lambda E) = 0$? Schreiben Sie für diese Werte von λ die Matrizen $A - \lambda E$ mit Zahleneinträgen konkret hin. Sind Sie invertierbar? Warum bzw. warum nicht?

Aufgabe 3

Wie Aufgabe 2, allerdings mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Wie viele gerade Permutationen von $(1, 2, 3, 4)$ gibt es? Listen Sie sie auf.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie (ausnahmsweise) die Determinante mit der Leibniz-Formel. Tipp: Die Formel liefert

$$\det M = 16 - 4 - 4 - 4 + 1 = 5$$

Erklären Sie, durch Angabe von Teilmatrizen mit jeweils nur 4 von Null verschiedenen Einträgen wie sich die einzelnen Summanden ergeben. (Vgl. Herleitung der Leibniz-Formel in der Vorlesung)

Aufgabe 6

Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ sind durch den Eliminationsschritt *zweite Zeile von B= 2 zweite Zeile von A - erste Zeile von A* verbunden. Berechnen Sie beide Determinanten. Warum unterscheiden sich die Determinanten?