ACHTUNG: Das Aufgabenblatt besteht aus zwei Seiten - 6 Aufgaben.

Aufgabe 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} \quad \text{mit} \quad \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Matrix A, mit der die skalare Gleichung $y'' = 5y' + 4y$ in eine Vektorgleichung für $\vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ umgeschrieben werden kann:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = A\vec{u}$$

Welche Eigenwerte hat A? Setzen Sie alternativ den Ansatz $y = e^{\lambda t}$ in die Gleichung $y'' = 5y' + 4y$ ein und bestimmen Sie die Lösungen.

Aufgabe 3

Auf einer einsamen Insel gebe es nur Kaninchen und Wölfe. Die Kaninchenpopulation k nimmt schnell zu (Summand $6k$), es gibt aber einen Verlust proportional zur Wolfspopulation w (Subtrahend $-2w$):

$$\frac{dk}{dt} = 6k - 2w \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dt} = 2k + w$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems. Welche Population erhält man für den Zeitpunkt t bei den Anfangswerten $k(0) = w(0) = 30$? Ist das Verhältnis der Populationen von Kaninchen zu Wölfen nach einer langen Zeit 1 zu 2 oder 2 zu 1? (Tipp: Grenzwert $t \to \infty$)

Aufgabe 4

Betrachten Sie die komplexen Eigenwertgleichungen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $d\vec{u}/dt = A\vec{u}$ mit dem Anfangswert $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination $a\, e^{it}\vec{x}_1 + b\, e^{-it}\vec{x}_2$. Bestimmen Sie die Koeffizienten. Setzen Sie dann die Formeln $e^{it} = \cos t + i\,\sin t$ und $e^{-it} = \cos t - i \sin t$ ein, und bestimmen Sie daraus eine andere Darstellung für $\vec{u}$.

Aufgabe 5

Sei A eine invertierbare Matrix. Welcher konstante Vektor löst die inhomogene Gleichung $d\vec{u}/dt = A\vec{u} - \vec{b}$? Dieser Vektor ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung, die wir $\vec{u}_p$ nennen (eine so genannte partikuläre Lösung). Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $d\vec{u}/dt = A\vec{u}$ sei mit $\vec{u}_h$ bezeichnet. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung hat dann die Form $\vec{u}_p + \vec{u}_h$. Bestimmen Sie diese allgemeine Lösung für die Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dt} = 2u - 8$$

(Verständnisfrage: Was ist eine invertierbare $(1/times1)$-Matrix?) und

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{u} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Die Exponentialfunktion besitzt die Taylor-Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

In diese Reihe kann man auch Matrizen einsetzen. Berechnen Sie die *Exponentialmatrizen* e^D und e^N für die Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie die Spalten von e^N mit den Lösungsvektoren zu einem Jordan-Kästchen aus der Vorlesung.