ACHTUNG: Das Aufgabenblatt besteht aus zwei Seiten - 7 Aufgaben.

Aufgabe 1

In der Vorlesung haben wir für die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = y + x$ die partikuläre Lösung $y(x) = -x - 1$ aus dem Richtungsfeld abgelesen.

Wie lautet die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems? Wie lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems?

Bestimmen Sie die Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = 1$, die Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = -1$ und die Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = -2$.

Aufgabe 2

Zeichnen Sie ein Richtungsfeld für die Differentialgleichung $y' = x^2 + y$ und zeichnen Sie näherungsweise die Lösungskurve durch den Punkt $(1, 1)$ ein.

Aufgabe 3

Zeichnen Sie ein Richtungsfeld für die Differentialgleichung $y' = y(4 - y)$ und zeichnen Sie näherungsweise die Lösungskurve durch den Punkt $(0, 1)$ ein.

Aufgabe 4

Verwenden Sie komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren, um zwei Lösungen für das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{u}$$

anzugeben. Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Lösungen (Tipp: $e^{(a+ib)t} = e^{a\,t}(\cos(b\,t) + i\,\sin(b\,t))$ und zeigen Sie durch Rechnen der Probe, dass diese ebenfalls Lösungen des Differentialgleichungssystems darstellen.

Aufgabe 5

Invertieren Sie die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Die Exponentialfunktion besitzt die Taylor-Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Schreiben Sie die ersten 10 Summanden hin und setzen Sie $x = i \cdot t$ ein ($i = \sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit) und sortieren Sie die Summanden in reelle (ohne i) und imaginäre (mit i). Vergleichen Sie dann mit der Formel

$$e^{i\,t} = \cos t + i\,\sin t$$

und geben Sie daraus die Taylor-Reihen für die Kosinusfunktion und die Sinusfunktion an.

Aufgabe 7

(Beispiel, wie man eine Jordan-Normalform erhält)

Rechnen Sie nach: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

besitzt den doppelten Eigenwert 4, aber nur eine Eigenvektorrichtung, nämlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei E die (2×2)-Einheitsmatrix. Rechnen Sie nach: Der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenschaften

$$(A - 4E)^2\,\vec{e} = \vec{0} \quad \text{und} \quad (A - 4E)\,\vec{e} \neq \vec{0}$$

Einen solchen Vektor nennt man „verallgemeinerten Eigenvektor“(vom Rang 2 zum Eigenwert 4). Der Vektor $\vec{v} = (A - 4E)\,\vec{e}$ ist ein Eigenvektor.

Man trägt den Eigenvektor $\vec{v}$ und den verallgemeinerten Eigenvektor als Spalten in eine Matrix ein (vgl. Eigenvektormatrix):

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & e_1 \\ v_2 & e_2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\vec{v}$, S^{-1} und $S^{-1}\,A\,S$. Welche Gestalt hat die letzte Matrix?