

ACHTUNG: Das Aufgabenblatt besteht aus zwei Seiten - 7 Aufgaben.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Welche Beziehung besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie für beide Matrizen Eigenwerte und Eigenvektoren. Welche Beziehungen bestehen?

Aufgabe 3

Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und B^2 ? Welche Beziehungen bestehen?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie von $K + L$. Besteht ein Zusammenhang?

Aufgabe 5

Sei A eine quadratische Matrix.

- a) Wenn man weiß, dass \vec{x} ein Eigenvektor ist, wie findet man den dazugehörigen Eigenwert?
- b) Wenn man weiß, dass λ ein Eigenwert ist, wie findet man die dazugehörigen Eigenvektoren?

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Eigenwerte für die Permutationsmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Welchen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt JEDE Permutationsmatrix?

Aufgabe 7

Diagonalisieren Sie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (d.h. bestimmen Sie die Eigenwertmatrix D und die Eigenvektormatrix S sowie ihre Inverse S^{-1}) und berechnen Sie $S D^k S^{-1}$, um zu zeigen, dass

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^k & 1 - 3^k \\ 1 - 3^k & 1 + 3^k \end{pmatrix}$$