Diesmal sind es 4 Aufgaben. (Ist etwas mehr Arbeit - teilt Aufgaben 1 und 2 innerhalb der Gruppen auf und erklärt die Aufgaben den jeweils anderen Gruppenmitgliedern. An den Aufgaben 3 und 4 sollte sich jeder versuchen - auch um Ergebnisse vergleichen zu können.)

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

a)
$$x\,y' + 2y = e^{x^2}$$

b)
$$\frac{dy}{dx} = x\sin(2x) + y\,\tan x \quad , \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

c)
$$xy' + xy + y = e^{-x} \quad , \quad x > 0$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a)
$$(1 + x^2)y' + 2xy = 3\sqrt{x} \quad , \quad y(0) = 2$$

b)
$$x\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = x \quad , \quad x > 0\ ,\ y(1) = 0$$

Aufgabe 3

(Bitte mit Taschenrechner, nicht mit Computer rechnen. Lernziel: Gefühl für diese Verfahren entwickeln. Das geht nur durch eigene Rechnung. Die Runge-Kutta-Formeln werden NICHT in der Klausur abgefragt. Das Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun können in der Klausur vorkommen.) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x + y \quad , \quad y(0) = 1$$

numerisch auf dem Intervall $[0, 1]$

a) mit dem Euler-Polygonzugverfahren (Schrittweite $0,1$, zehn Schritte),

b) mit dem Verfahren von Heun (Schrittweite $0,2$, fünf Schritte) und

c) mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren (Schrittweite $0,5$, zwei Schritte). Die Formeln für ein Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ lauten

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\, k_1) \\
k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\, k_2) \\
k_4 &= f(x_{n+1}, y_n + h\, k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Zeichnen Sie die numerischen Lösungskurven als Polygonzüge und die exakte Lösung mit verschiedenen Farben in ein schön großes Koordinatensystem.

Zeichnen Sie in ein neues Koordinatensystem (wiederum schön groß) den ersten Schritt des Runge-Kutta-Verfahrens ein und markieren Sie durch Punkte, wo die jeweiligen Ableitungen k_1, k_2, k_3 und k_4 berechnet werden und durch kleine Tangentenstücke mit entsprechender Steigung, wie groß diese Steigungen sind.

Aufgabe 4

ACHTUNG: Fortsetzung von letzter Woche. Ergebnisse von dieser Woche werden benötigt. Bitte vor Abgabe kopieren bzw. aufschreiben.

Wir betrachten die Gleichung

$$y^3 + x^3 = 6xy$$

Wir haben berechnet: Für $y = 3$, für $y = -1$ und für $y = 1$ die zugehörigen Lösungen in x.

Vergleichen Sie die Gleichung, in die $y = 3$ eingesetzt wurde, mit der Gleichung, in die $x = 3$ eingesetzt wird. Geben Sie die Lösungen in y an für $x = 3$, für $x = -1$ und für $x = 1$.

Zeichnen Sie alle gefundenen Lösungen (x, y) in ein Koordinatensystem.

Berechnen Sie per impliziter Differentiation $\frac{dy}{dx}$ und setzen Sie die oben gefundenen Punkte in diese Formel ein. Zeichnen Sie die errechneten Steigungen als kleine Tangentenstücke in die zugehörigen Punkten ein.