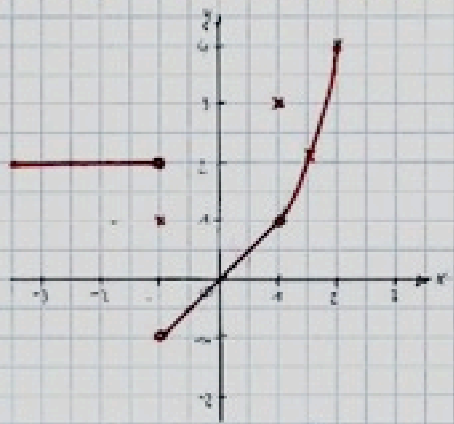
Übung: Zeichne den Graphen von

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } x = -1 \\ x & \text{für } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \\ x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

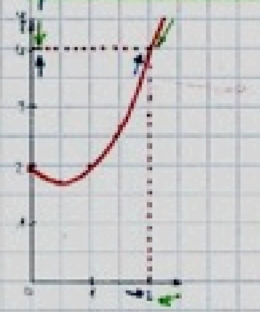
x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	2	2	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	$2{,}25$	4



Erinnerung:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Grenzwerte von Funktionen



$y = x^2 - x + 2$

Wie sieht der Graph in der Umgebung von $x = 2$ aus?

Betrachte die Bereiche $\boxed{x > 2}$ (rechts) und $x < 2$ (links) getrennt.

Was passiert mit den Funktionswerten, wenn wir uns von rechts $x = 2$ annähern?

x	3	2,5	2,2	2,1	2,03	2,01	2,005	2,001
$f(x)$	8	5,75	4,64	4,31	4,1023	4,03	4,015	4,003

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$ ← · rechtsseitiger Grenzwert
· rechtsseitiger Limes

„+" bedeutet, dass nur Werte > 2 zugelassen sind

Das gleiche von links:

x	1	1,5	1,8	1,9	1,95	1,99 ...
$f(x)$						...

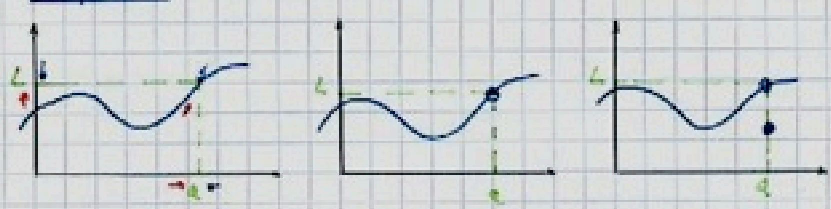
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ ← : linksseitiger Grenzwert
: linksseitiger Limes

Stimmen linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert überein, dann schreibt man (in diesem Bsp.):

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

keine Einseitigkeit mehr
→ beidseitiger Grenzwert / Limes

Beispiele:



$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

$\lim_{x\to a} f(x) = L$

↳ da die einseitigen Grenzwerte gleich sind

Wichtig: Für den Grenzwert $x\to a$ spielt es überhaupt keine Rolle, ~~ob~~ was die Funktion an der Stelle a macht.

Im Grenzprozess werden nur x-Werte berücksichtigt, die verschieden von a sind.

Beispiel: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+9}-3}{\varepsilon^2}$

ε	$\frac{\sqrt{\varepsilon^2+9}-3}{\varepsilon^2}$
1	0,16228
0,5	0,16553
0,1	0,16662
0,05	0,16666
0,01	0,16667
0,00001	TR=0
0,0000001	TR=0

Vermutung: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+9}-3}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{6}$

ACHTUNG: Manchmal lügen Taschenrechner!

Später: Rechenmethoden zeigen, dass 1/6 der Grenzwert ist.

Anmerkung: Es kann höchstens einen Grenzwert geben (Es ist auch möglich, dass er nicht existiert).

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{f(x)} = ?$

$f(1) = \sin\pi = 0$
$f(0{,}5) = \sin 2\pi = 2 \cdot 0 = 0$
$f(0{,}1) = \sin 10\pi = 0$
$f(0{,}001) = \sin 1000\pi = 0$

Vermutung: Grenzwert ist 0!

← schwingt immer schneller

Man hätte auch $x_1, x_2, x_3, \ldots$ wählen können mit $f(x_1) = 1 = f(x_2) = \ldots$

oder auch x_1^*, x_2^*, x_3^* mit $f(x_1^*) = 0$; $f(x_2^*) = 1$; $f(x_3^*) = 0$

Nähern wir uns z.B. von rechts der Stelle $x = 0$ an, so „schwingen" die Funktionswerte $f(x)$ zwischen -1 und $+1$.

Es gibt keine eindeutige reelle Zahl, der sich die Funktionswerte nähern.

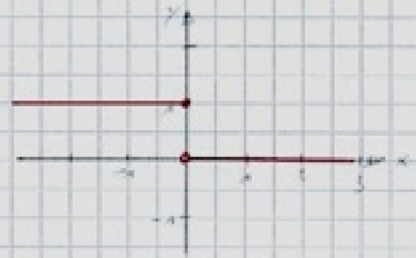
Das ist ein Beispiel dafür, dass die (einseitigen und der beidseitige) Grenzwerte nicht existieren.

Wir schreiben $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$ existiert nicht.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$ existiert nicht.

Der beidseitige Grenzwert existiert nur dann, wenn beide einseitigen Grenzwerte existieren und gleich sind.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

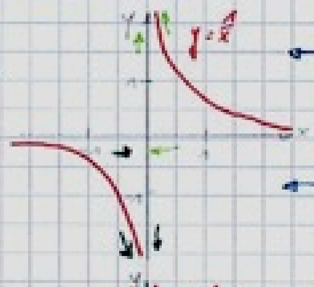
Da die einseitigen Grenzwerte verschieden sind, gilt

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

! Bisher waren die Grenzwerte Zahlen (sofern sie überhaupt existierten).

Es ist nützlich auch die folgenden „uneigentlichen" Grenzwerte zu verwenden:

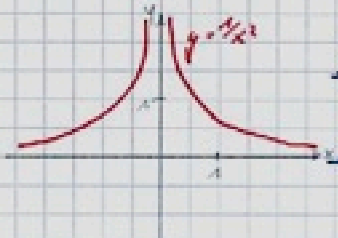
Beispiele:



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht!



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Definition: Die Gerade $x = a$ heißt vertikale Asymptote, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Beispiel: $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x+3} = +\infty$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x+3} = -\infty$

Wir haben gesehen, dass Taschenrechner und Wertetabelle zwar den Grenzwert andeuten können; aber dass sie nicht zuverlässig den Grenzwert lassen.

es bleibt immer eine Lücke, in der alles passieren kann!

Wir müssten unendlich viele Werte berechnen, um der Stelle a beliebig nahe zu kommen.

Es ist unmöglich unendlich viele Werte zu berechnen. Wir benötigen eine andere Technik, um Grenzwerte zuverlässig in endlich vielen Schritten zu berechnen.

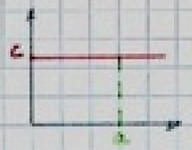
Bedeutung von Grenzwerten

Sie beschreiben einen unendlichen Prozess in endlich vielen Schritten.

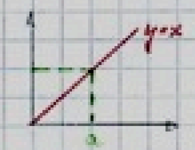
Regeln zur Berechnung von Grenzwerten

Spezielle Grenzwerte

$$\lim_{x \to a} c = c$$



$$\lim_{x \to a} x = a$$



Grenzwertsätze

I $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

II $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

III $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

IV $\lim_{x \to a} [f(x) : g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) : \lim_{x \to a} g(x)$

Diese Grenzwertsätze haben alle die gleiche Struktur! Die Rechenoperation und die Grenzwertbildung lassen sich (ergeben) in beiden Folgen dasselbe.

V $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot c$

Diese Regeln gelten nur, wenn alle auftretenden Grenzwerte existieren und im Falle des Quotienten zusätzlich

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \text{ gilt.}$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-5}{7x+2} \overset{IV}{=} \frac{\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-5)}{\lim_{x\to 2}(7x+2)}$$

$$\overset{I,II}{=} \frac{\lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 5}{\lim_{x\to 2} 7x + \lim_{x\to 2} 2}$$

$$\overset{III,V}{=} \frac{(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2\cdot(\lim_{x\to 2} x)^2 - 5}{7\cdot \lim_{x\to 2} x + 2}$$

$$= \frac{2^3+2\cdot 2^2-5}{7\cdot 2+2} = \underline{\underline{\frac{11}{16}}}$$

Regel: Ist f eine rationale Funktion $\left(\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}\right)$, so gilt: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$

falls $f(a)$ definiert ist.

Beispiel:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 7} \frac{4x^2-5x+6}{3x^3-4} = \frac{4\cdot 7^2-5\cdot 7+6}{3\cdot 7^3-4} = \underline{\underline{\frac{167}{1025}}}$$

Das ist eine rationale Funktion (d.h. besteht nur aus Zahlen, aus „x" und den Grundrechenarten.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 7} \frac{3}{x-7}$$

Diese Funktion ist zwar rational, aber nicht an der Stelle 7 definiert. Wir können also nicht einsetzen.

Darauf können wir zunächst nur schließen, dass das Verfahren nicht funktioniert.

Ob der Grenzwert existiert müssen wir auf anderem Wege herausfinden:

$$\lim_{x \to 7^+} \frac{3}{x-7} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 7^-} \frac{3}{x-7} = -\infty$$

Die einseitigen Grenzwerte sind verschieden, d.h. $\lim\limits_{x \to 7} \frac{3}{x-7}$ existiert nicht!

Beispiel: • $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (siehe oben)

• $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

$= \underline{\underline{2}}$

Anmerkung: Die Funktionen $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

und $g(x) = x+1$

sind verschieden; denn f ist nicht in 1 definiert, während g überall definiert ist.

Also: $\frac{x^2-1}{x-1} \neq (x+1)$.

Trotzdem gilt:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1)$$

Denn für $x \neq 1$ gilt

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= x+1 = g(x)$$

Die Funktionen unterscheiden sich nur an der Stelle 1.

Diese Stelle spielt bei „$\lim\limits_{x \to 1}$" keine Rolle!

Weitere Grenzwertregel:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} = \frac{\lim\limits_{t \to 0} \left(\sqrt{t^2+9} - 3\right)}{\lim\limits_{t \to 0} t^2}$$

$$= \frac{\;}{0}$$ ← Hier ist etwas schief gelaufen.

Das bedeutet nicht, dass der Grenzwert nicht existiert, sondern, dass das Verfahren nicht funktioniert.

Trick: 3. Binomische Formel

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\sqrt{t^2+9}\right)^2 - 3^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3}$$

$$= \frac{\lim\limits_{t \to 0} 1}{\lim\limits_{t \to 0} \sqrt{t^2+9} + 3} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \sqrt{t^2+9} + \lim\limits_{t \to 0} 3} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \sqrt{t^2+9} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+9} - 3} = \underline{\frac{1}{6}}$$