

Hausaufgaben für M-07, Mathematik 2 zum 09.05.2008

Das Aufgabenblatt besteht aus drei Seiten.

Aufgabe 1

Verwenden Sie die Cramersche Regel, um das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

zu lösen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

mit der Kofaktor-Methode. Rechnen Sie auch die Probe $M \cdot M^{-1} = E$. (Die Einheitsmatrix wird oft mit E oder auch mit I von *identity matrix* bezeichnet.)

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie dann die Matrix B , indem sie als neue erste Zeile das doppelte der alten ersten Zeile minus zweite Zeile hinschreiben. (Kontrolle: Der Eintrag oben rechts ist dann 0) Die anderen Zeilen bleiben unverändert.

Berechnen Sie nun die Determinante von B . (Sie sollte $\neq \det A$ sein.)

Die Aufgabe soll zeigen: Wenn man nicht die Standardform eines Eliminationschritt verwendet, dann ändert sich die Determinante.

Aufgabe 4

Diese Aufgabe stellt die Formeln vor, mit denen man die Steigung und den Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden direkt bestimmen kann.

Für die lineare Modellgleichung

$$y = m \cdot x + b$$

und die Datenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate die Modellparameter nach folgenden Formeln: Zunächst berechnet man die Durchschnittswerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

und dann die Steigung

$$m = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}$$

sowie den Achsenabschnitt

$$b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}.$$

Wenden Sie die Matrix-Methode der Vorlesung auf die Modellgleichung $y = mx + b$ und die abstrakten Daten (x_i, y_i) an, um die obigen Formeln für die Steigung m und den Achsenabschnitt b herzuleiten.

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie man die Rechnung zur Ausgleichsgeraden geeignet durch eine Tabelle dokumentiert. Das wird häufig in der Diplomarbeit benötigt.

In der nachfolgenden Tabelle sind 8 Datenpaare (x_i, y_i) eingetragen. Berechnen Sie die anderen Einträge der Tabelle, wobei die vorletzte Zeile die jeweilige Spaltensumme und die letzte Zeile den Durchschnittswert der Spalte enthält. Setzen Sie dann die Werte der letzten Zeile in die Formel für m aus der vorhergehenden Aufgabe ein. Zeichnen Sie die Datenpunkte und die berechnete Ausgleichsgerade in ein Streudiagramm ein.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1		
2	3	2		
3	4	4		
4	6	4		
5	8	5		
6	9	7		
7	11	8		
8	14	9		
\sum				
$\frac{1}{8} \sum$				

Aufgabe 6

In dieser Aufgabe berechnen wir ein exponentielles Modell für die Höhen- und Luftdruckdaten aus der Vorlesung.

Die Modellgleichung

$$p = a \cdot e^{-b \cdot h}$$

geht durch Logarithmieren in die lineare Gleichung

$$\ln p = \ln a + (-b) \cdot h$$

über. Fertigen Sie eine Tabelle wie in Aufgabe 5 mit $x_i = h_i$ und $y_i = \ln p_i$ mit den (teilweise logarithmierten) Daten der Vorlesung an. Berechnen Sie die Ausgleichsgerade und zeichnen Sie ein Streudiagramm für die transformierten Daten (x_i, y_i) . Zeichnen Sie auch die Ausgleichsgerade ein.

Berechnen Sie a und damit die geschätzten Werte

$$\hat{p}_i = a \cdot e^{-b \cdot h_i}$$

Zeichnen Sie ein Streudiagramm für die ursprünglichen Daten (h_i, p_i) und zeichnen Sie die gefundene Exponentialfunktion mit Hilfe der geschätzten Werte ein.

Tipps und Anmerkungen

Die Vorlesungen zu Determinanten habe ich in Anlehnung an Kapitel 5 im Buch von Gilbert Strang gehalten. Die Übungsaufgaben in diesem Buch sind besonders lehrreich.

Das Thema Ausgleichskurven findet man in fast allen Statistik-Büchern, z.B. in Kapitel 2.8 *Regressionsrechnung* im Buch von Sachs. Etwas verwirrend: Dort wird die Steigung mit b bezeichnet. Die Beispieldaten zum Luftdruck sind aus diesem Buch. Unsere Aufgabe 6 findet man dort als Aufgabe 2.20 (mit kurzer Lösung im Anhang des Buches.) Im Buch von Strang findet man auch etwas dazu (S. 220–225). Die dortigen Formeln (4.19) – (4.22) könnten auch eine gute Hilfe zu unserer Aufgabe 4 sein.

Beide Bücher, das von Sachs (*Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieurstudenten an Fachhochschulen*) und das von Strang (*Lineare Algebra*), stehen im Semesterapparat.