

## Behandelte / geplante Themen in Mathematik 2 für MP-08

Diese Liste soll lediglich einen groben Überblick über die Veranstaltung geben. Sie wird laufend - hoffentlich ;-)- an den aktuellen Stand der tatsächlich bearbeiteten Themen angepasst.

Veranstaltung	Inhalte
V 16.3.	<p>Rückschau: Lehrevaluation</p> <p>Umkehrfunktionen, Beispiel Umrechnung Fahrenheit / Celsius, Umkehrfunktion durch Spiegeln an Winkelhalbierenden bzw. durch Blatt umdrehen</p> <p>Definition umkehrbar (horizontale Geraden schneiden Graph in höchstens einem Punkt)</p> <p>Beispiel Normalparabel, nicht umkehrbar, aber Einschränkung auf rechten Ast ist umkehrbar, Wurzelfunktion per Definition nicht-negativ</p> <p>Problematik der Notation</p> <p>Eigenschaften: monotone Funktionen sind umkehrbar, Stetigkeit bleibt erhalten, Differenzierbarkeit bleibt erhalten (Ausnahme bei horizontaler Tangente, s. kubische Parabel / dritte Wurzel)</p> <p>Ableitung der Umkehrfunktion</p> <p>Beispiel: Tangensfunktion, Einschränkung auf Hauptzweig, Ableitung der Arkustangensfunktion</p>
Ü 17.3. / 18.3.	<p>Beispiel: Arkussinus, Hauptzweig der Sinusfunktion, Umkehrfunktionsbeziehungen gelten nur im Bereich des Hauptzweigs, Werteberechnung über rechtwinklige Dreiecke und Pythagoras</p> <p>Exponential- und Logarithmusfunktion: Definition einer Potenz für natürliche Exponenten, Potenzgesetze, Exponent 0, ganzzahlige Exponenten, Brüche als Exponenten über Wurzeln (Basis muss positiv sein) , irrationale Exponenten über Stetigkeit</p> <p><math>2^x</math> ist symmetrisch zu <math>(1/2)^x</math>.</p> <p>Modellierung (Bakterienwachstum, radioaktiver Zerfall, einhüllende Kurve für gedämpftes Pendel), Graphen, Basis kleiner 1, gleich 1, größer 1, Ableitung ist ursprüngliche Funktion mal Ableitung an der Stelle 0, Definition der Zahl e als Basis mit Steigung 1 an der Stelle 0, exponentielles Wachstum (Schachbrett, Flughöhe),</p>

Veranstaltung	Inhalte
V 23.3.	<p>Ableitung der Arkussinusfunktion</p> <p>Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, Umkehrfunktionsbeziehungen, Logarithmensätze, Umschreibung eines allgemeinen Logarithmus mithilfe des natürlichen Logarithmus, Umschreibung einer allgemeiner Exponentialfunktion mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion, Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion</p> <p>Grenzwerte der Logarithmus-Funktion, langsames logarithmisches Wachstum (Erdumrundung), Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktion, Integration von <math>1/x</math>,</p> <p>Beispiel Kurvendiskussion (einseitige vertikale Asymptote), Grenzwerte berechnen mit Substitution des Exponenten</p>
Ü 24.3. / 25.3.	<p>kurze Einführung in hyperbolische Funktionen: Definitionen als Linearkombinationen von Exponentialfunktionen, Vergleich mit umgekehrter Eulerscher Formel (Trigonometrische Funktionen als Linearkombinationen komplexer Exponentialfunktionen), Graphen, Symmetrie, Ableitungen</p> <p>Regel von L'Hospital: Formulierung, Voraussetzungen, Beispiele, Vereinfachen nach Anwendung der Regel, Produkte und Differenzen in Quotienten verwandeln, Grenzwerte von Potenzen, Trick: Potenz umschreiben mit Exponential- und Logarithmusfunktion</p>
V 30.3.	<p>Defintion des bestimmten Integrals - Grenzwert der Riemann-Summen - als Grundlage für numerische Verfahren</p> <p>numerische Integration: Mittelpunktsregel, Trapezregel, effiziente Berechnung von <math>T_1</math>, <math>M_1</math>, <math>T_2</math>, ...</p> <p>Beispiel zur numerischen Integration: <math>T_1</math>, <math>M_1</math>, ..., gleichzeitige Entwicklung des Graphen, Romberg-Schema (erste Zusatzspalte entspricht Simpson-Regel), Probe durch Kästchenzählen</p> <p>Hinweis auf numerische Probleme bei großer Anzahl kleiner Teilintervalle: Rundungsfehler summieren sich auf</p>
Ü 31.3. / 1.4.	<p>partielle Integration, Trick Logarithmus, Trick Gleichungsaauflösen, Beispiel zweimalige Anwendung, Hinweis auf Substituieren der Grenzen bei bestimmten Integralen, Beispiel: Anwendung der numerischen Integration zur Berechnung von <math>\ln 2</math>, Übungen zur partiellen Integration</p>

Veranstaltung	Inhalte
V 6.4.	<p>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Anwendung als Ableitungsregel, Verknüpfung mit anderen Ableitungsregeln</p> <p>Integration rationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung, echte, unecht/echt gebrochen-rationale Funktionen, Polynom=ganz-rationale Funktion, Polynomdivision, Partialbruchzerlegung bei lauter unterschiedlichen Linearfaktoren, Koeffizientenvergleich, Anwendung Gauß-Algorithmus, Abkürzung durch Einsetzen der Nenner-Nullstellen</p>
Ü 7.4. / 8.4.	<p>Partialbruchzerlegungen mit mehrfachen Linearfaktoren und einfachen bzw. mehrfachen irreduziblen quadratischen Faktoren, Integrationsbeispiele mit quadratischem Nenner insbesondere Technik der quadratischen Ergänzung</p> <p>kurzer Hinweis auf trigonometrische Substitution und trigonometrische Integrale</p>
V 13.4.	Ostermontag
Ü 14.4. / 15.4.	<p>Uneigentliche Integrale, Flächen mit unendlicher Breite aber endlichem Flächeninhalt, Beispiel Rechteckflächen zu einer Dezimalzahl, Beispiel <math>1/x^2</math> und <math>1/x</math>, vergleichende Graphik, schnelle Annäherung an Null entscheidend für endliche Fläche, Aufteilung in bestimmtes Integral und Grenzwertprozess, uneigentliche Integrale bei Unstetigkeiten am Rand und im Innern des Intervalls, Vergleichskriterien (Majoranten- und Minorantenkriterium)</p>
V 20.4.	<p>Einführung in unendliche Reihen, Zenos Paradoxon, Summandenfolge, Partialsummenfolge, Übersichtstabelle, Partialsummen als Näherungswert der Summe, Summanden müssen gegen 0 gehen, harmonische Reihe (2 Begründungen für Divergenz: Vergleich mit Integral über <math>1/x</math>; Vergleich mit Summe von <math>1/2</math>), Definition einer Folge, Grenzwert-Begriff</p> <p>geometrische Reihe, Definition (konstanter Faktor), Berechnung der Partialsummen</p>

Veranstaltung	Inhalte
Ü 21.4. / 22.4	<p>Formel: Summe einer geometrischen Reihe, Zeichnung: Partialsummen nähern sich der Funktion an</p> <p>Beispiel: Reihenentwicklung der Arkustangensfunktion, Substitution in geometrische Reihe, gliedweises Integrieren, Berechnen der Integrationskonstante, Zeichnung der Partialsummen</p> <p>Beispiel Partialsummenberechnung über Partialbruchzerlegung</p> <p>Exakte Berechnung oft unmöglich: Rolle der Kriterien, bei Konvergenz näherungsweise Berechnung der Summe</p> <p>Divergenzkriterium (Hinweis auf harmonische Reihe)</p> <p>alternierende Reihen (noch ohne Zeichnung)</p>
V 27.4.	<p>Beispiel: alternierende harmonische Reihe, Zeichnung zeigt "Einpendeln", Beispiel <math>\cos 1</math></p> <p>Quotientenkriterium, Beispiel (insbesondere Kürzen)</p> <p>Definition Potenzreihen, Koeffizienten, Entwicklungspunkt/Zentrum, Konvergenzradius, Beispiel unendlicher Konvergenzradius, Potenzreihe definiert Funktion, schöne Eigenschaften: Stetigkeit, (unendlich oft) differenzierbar, (gliedweise) integrierbar, einfache näherungsweise Berechnung von Funktionswerten durch Partialsummen (=Polynome, Grundrechenarten)</p> <p>Berechnung der Koeffizienten, Taylor-Formel, Beispiel Reihenentwicklung der Exponentialfunktion</p>
Ü 28.4. / 29.4.	<p>Beispiel Reihenentwicklung Kosinus, Logarithmus,</p> <p>Anwendung bei Integration, Fehlerabschätzungen</p>
V 4.5.	<p>Matrizen, Dimension/ Größe einer Matrix, Zeilen-/Spaltenindex, quadratische Matrix, transponierte Matrix, Diagonalmatrix, obere Dreiecksmatrix, Gleichheit von Matrizen, Zeilenvektor, Spaltenvektor, Addition, skalare Multiplikation, Matrixmultiplikation, i.a. keine Kommutativität, Assoziativität und Distributivität erfüllt, Einheitsmatrizen</p>
Ü 5.5. / 6.5.	<p>Beispiele zur Matrixmultiplikation</p> <p>Zeilenumformungen als Matrixmultiplikation von links, inverse Matrix, simultanes Lösen von linearen Gleichungssystemen, Matrix-Inversion nach Gauß-Jordan</p>

Veranstaltung	Inhalte
V 11.5.	<p>Determinanten: nur für quadratische Matrizen, null bedeutet Matrix nicht invertierbar, nicht-null bedeutet Matrix invertierbar</p> <p>(1*1)-, (2*2)-, (3*3)-Determinante als Motivation der Leibniz-Formel, Permutationen, Leibniz-Formel - schnell wachsende Zahl der Summanden, praktisch unbrauchbar,</p> <p>Definition Minore: Zeile/Spalte streichen, Determinante der gestrichenen Matrix, Definition Kofaktor: Vorzeichen nach Schachbrettmuster, Laplacescher Entwicklungssatz, Beispiel: Nullen ausnutzen</p> <p>Effiziente Berechnung unter Verwendung von Eliminationsschritten (sie ändern die Determinante nicht), Zeilenvertauschungen ändern das Vorzeichen, Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist Produkt der Diagonalelemente</p> <p>Cramersche Regel: nur für lineare Gleichungssysteme mit quadratischer, invertierbarer Koeffizientenmatrix, Vorteil: sofort verfügbare Formel</p> <p>Matrix-Inversion über Determinanten: transponierte Matrix der Kofaktoren geteilt durch Determinante der Matrix</p>
Ü 12.5. / 13.5.	<p>Funktionen in mehreren Veränderlichen, Definitionsbereiche, Darstellung als Graph im 3D-Koordinatensystem, Darstellung durch Höhenlinien, Vorbereitung: Steigungen hängen vom Punkt und der Richtung ab</p>
V 18.5.	<p>Schnittfunktionen, partielle Ableitungen, Tangentialvektoren, Tangentialebene, Parameterdarstellung, Normalenvektor, Ebenengleichung, Rechenbeispiele, auch implizites Differenzieren</p>
Ü 19.5./ 20.5.	<p>Kettenregel in mehreren Variablen, Richtungsableitung, Gradient, Richtung und Betrag des stärksten Anstiegs, Gradient steht senkrecht auf Höhenlinien</p>
V 25.5.	<p>Extrema in mehreren Veränderlichen, Definitionen, kritische Punkte, zweite partielle Ableitungen, Satz von Schwarz, Hesse-Matrix (symmetrisch), Beispiel Extremwerte bei Definitionsbereich mit Rand, kurzer Ausblick: Anwendung Formeln der linearen Regression über kleinste Quadrate</p>
Ü 26.5./ 27.5.	<p>allgemeine Kettenregel, Anwendung Umrechnung Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten, Exkurs: Kettenregel in Matrixschreibweise, totales Differential, (Anwendungen Thermodynamik), Idee der Linearisierung, Fehlerfortpflanzung</p>
V 1.6.	<p>Pfingstmontag</p>

Veranstaltung	Inhalte
Ü 2.6./ 3.6.	Einführung in Differentialgleichungen, Was bedeutet eine Lösung? Beispiele Integration als Sonderfall, Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung, Ordnung einer DGL, Klassifikation gewöhnlich/partiell, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, Beispiel elektrischer Schaltkreis, Trennen der Variablen, Beispiel Masse an Stahlfeder, graphische Lösungsmethode: Richtungsfeld
V 8.6.	Lösen einer linearen DGL erster Ordnung: homogenes Problem, Trennen der Variablen, Variation der Konstanten, Ansatzfunktion in inhomogene DGL einsetzen; Anmerkung zu allgemeiner Lösung des homogenen Problems: Konstanter Faktor, Aufspaltung der allgemeinen Lösung des inhomogenen Problems in partikuläre Lösung des inhomogenen und allgemeine Lösung des homogenen Problems
Ü 9.6./ 10.6.	Numerische Verfahren: Euler-Polygonzug-Verfahren  Video: MIT-Vorlesung zum Euler-Polygonzug-Verfahren, systematischer Fehler in Abhängigkeit von Krümmung, Bestimmung der Krümmung über implizites Differenzieren, Verbesserung durch kleinere Schrittweiten, Modifikation des Verfahrens (Mittelwert der Anfangs- und Endsteigung): Verfahren von Heun, Hinweis auf Verfahren von Runge-Kutta (ohne Formeln)
V 15.6.	Einführung in lineare DGL zweiter Ordnung, Motivation: Newtons Bewegungsgesetz enthält die zweite Ableitung, Standardform, homogene / inhomogene Gleichung, Linearkombination von Lösungen ist Lösung, allgemeine Lösung ist Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen, Definition: linear unabhängig, Berechnung über Wronski-Determinante, Spezialfall: konstante Koeffizienten, Lösungsansatz über $e^{rx}$ -Funktion führt auf quadratische Gleichung in $r$ : charakteristische Gleichung, drei Fälle: zwei reelle Lösungen, doppelte Lösung, konjugiert komplexe Lösungen
Ü 16.6./ 17.6.	freie ungedämpfte/ gedämpfte Schwingungen, harmonische Schwingung, Umrechnung Linearkombination Sinus und Kosinus auf verschobene Kosinus-Funktion, Schwingungsdauer, Kreisfrequenz, Phasenverschiebung, Effekt der Dämpfung: exponentiell abklingende Amplitude, Verlangsamung der Bewegung, Schwingungsdauer wird größer, aperiodischer Grenzfall  allgemeine Lösung einer DGL zweiter Ordnung,

Veranstaltung	Inhalte
V 22.6.	<p>partikuläre Lösung des inhomogenen Problems, Methode der unbestimmten Koeffizienten, rechte Seiten: Polynom, Sinus, Kosinus, Exponentialfunktion, bei Summe auf rechter Seite kann aufgespalten werden, Testfunktion mit <math>x</math> multiplizieren, falls Ansatz Teil der homogenen Lösung ist</p>
Ü 23.6./ 24.6.	<p>erzwungene ungedämpfte Schwingung</p> <p><math>x'' + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t)</math>, Resonanz, 1. Fall <math>\omega \neq \omega_0</math>, Testfunktion ist nicht Bestandteil der homogenen Lösung, Amplitude hängt von <math>\omega</math> ab, vertikale Asymptote bei <math>\omega_0</math>, zeitliche Entwicklung der Lösung: langsam schwingende Amplitude multipliziert mit schneller Schwingung (trigonometrische Identität für Differenz von Kosinusfunktionen ist Produkt von Sinusfunktionen), 2. Fall <math>\omega = \omega_0</math>, andere Testfunktion erforderlich, Sinusschwingung mit linear wachsender Amplitude</p> <p>kurze Anmerkung zu erzwungener gedämpfter Schwingung: Asymptote wird zu lokalem Maximum, Lage ist links von den Systemfrequenzen</p>