2. Semester

Integralrechnung

Zwei Konzepte

① Umkehrung des Differenzierens

② Flächeninhaltsberechnung

- Konzepte werden durch den „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" zusammengeführt

Def: Ist f die Ableitung von F, so heißt F eine **Stammfunktion** von f.

Bsp: $f(x) = x^2$

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{d}{dx} F_1(x) = 3\,\frac{1}{3}x^2 = x^2$$

$$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$$

$$\frac{d}{dx} F_2(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 0 = x^2$$

- 2 Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich dadurch, dass ihre Differenz eine Zahl sein muss.

  $F_1 - F_2 = C \in \mathbb{R}$

- <u>Technisches Detail</u>:
  + ist die Stammfunktion auf mehr als einem Intervall definiert, so kann man für jedes Intervall eine andere Zahl C erhalten

- <u>Schreibweise</u>

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

$$F(x) = \boxed{\int f(x)\, dx}$$ – Stammfunktion bestimmtes Integral

$\int$ Integralzeichen

dx gibt an, über welche Variable integriert wird

allgemeine Stammfunktion

$$F(x) = \int f(x)\, dx + C$$ → Integrationskonstante

<u>Beispiele</u>: Was sind Stammfunktionen?

(i) $\sin x$ $\quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$, denn $\frac{d}{dx}(-\cos x) = -(-\sin x)$

(ii) x^n ; $n \geq 0$ $\quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, denn $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right) = x^n$ (für alle $n \neq -1$

(iii) x^{-3} $\quad \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$, denn $\frac{d}{dx} -\frac{1}{2} x^{-2} + C$

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}}$$

$$\int x^{-3} \, dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$$

Achim empfiehlt diesen Zwischenschritt, sonst Fehler verdächtig!!!

- Da die Stammfunktion auf zwei (getrennten) Intervallen definiert ist, müsste man zwei Integrationskonstanten verwenden,

<u>also</u>:

$$\int \frac{1}{x^3} \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{2x^2} + C \; ; & \text{für } x < 0 \\ -\frac{1}{2x^2} + D \; ; & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Zusatzinformationen können dazu führen, dass man tatsächlich zwei unterschiedliche Integrationskonstanten auf den Intervallen benötigt (Sie können aber auch gleich sein)

<u>Bsp:</u>

$$\int 4 \cdot \sin x - 3x^5 + 6\sqrt[4]{x^3} \, dx = -4\cos x - \frac{1}{2}x^6 + 6 \cdot \frac{1}{\frac{7}{4}} x^{7/4} + C$$

$$= -4\cos x - \frac{1}{2}x^6 + 6 \cdot \frac{4}{7} x^{7/4} + C$$

$$\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int c\, f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$$

<u>Beispiel:</u> ① Sei $f'(x) = x \cdot \sqrt{x}$ und $f(1) = 2$

Bestimme die Funktion f. Lösung

② $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$; $f(0) = 4$; $f(1) = 1$

$f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$

$f'(x) = \frac{12}{2+1} x^{2+1} + \frac{6}{1+1} x^{1+1}$

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$

$f(x) = \frac{4}{3+1} x^{3+1} + \frac{3}{2+1} x^{2+1} - \frac{4}{1+1} x^{1+1} + Cx + d$

$f(x) = 1x^4 + 1x^3 - 2x^2 + Cx + d$

$f(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

$1 = 1^4 + 1^3 - 2^2 + C \cdot 1 + 4$

$1 = 1 + 1 - 2 + C + 4$

$1 = 1 + 3 + C$

$C = -3$

$f'(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$f(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

$2 = \frac{2}{5} 1^{\frac{5}{2}} + C$

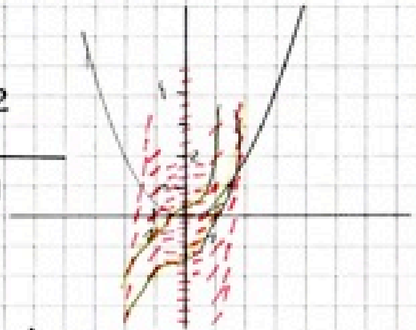
$C = \frac{8}{5}$

$f(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{5}$

Graphisches Auffinden einer Stammfunktion

$f'(x) = x^2$ beschreibt die Steigung der Tangenten

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f'(x)$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4



Richtungsfeld (besteht aus)
1 = Richtungselement ≙ Tangentenstücke

Teilchen
A particle moves in a straight line
Beschleunigung
and has accelebration given by $a(t) = 6 \cdot t + 4$. Its
Anfangs, Geschwindigkeit, Verschiebung / Position
initial velocity is $v(0) = -6 \frac{m}{s}$ and its initial displacement is $s(0) = 9m$.
Find ~~is~~ its position ~~as~~ function $s(t)$

$a(t) = 6t + 4$

$v(t) = \frac{6}{2}t^2 + 4t + C$

$s(t) = \frac{3}{3}t^3 + \frac{4}{2}t^2 + Ct + d$

$s(t) = 1t^3 + 2t^2 + Ct + d$

$0 = \ldots$ & $v(0) = -6$

$\int 6t + 4 \, dt = 3t^2 + 4t + C$

$-6 = 0^2 + 4 \cdot 0^2 + C \quad \underline{C = -6}$

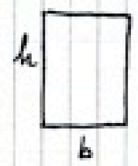
$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$

$\int 3t^2 + 4t - 6 \, dt = t^3 + 2t^2 - 6t + d$

$9 = 0\,0\,0 \ldots + d =$

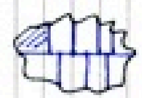
Das Flächeninhaltsproblem – das bestimmte Integral

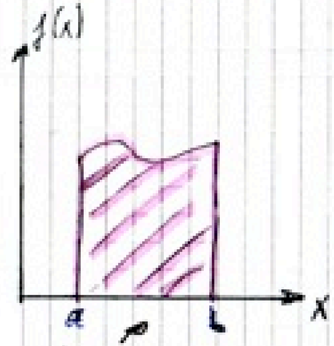
elementarer Flächeninhalt



$A = b \cdot h$

- wie berechnet man den Flächeninhalt, wenn die Begrenzungslinie „krumm" ist?

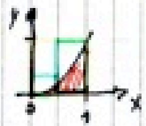




Teilproblem

- Teilproblem: Flächeninhalt „unter" einem Funktionsgraphen
- Idee: kariertes Papier -> Kästchen zählen

Beispiel: $f(x) = x^2$



$A_1 = 1\,[FE]$ obere Abschätzung

$A_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 1$

$A_2 = 0{,}125 + 0{,}5 = 0{,}625\,[FE]$

$$A_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Erinnerung: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Neu: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

} Summationsformeln

n	1	2	100	200	500	1000
A_n	1	0,625	0,33835	0,3358375	0,3343	0,3338

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

für $n = 2$ $= \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6}$

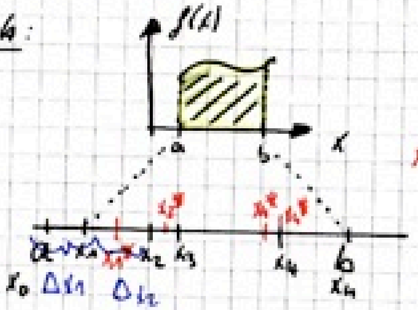
$= \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}$

$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$\frac{3\cdot 5}{6\cdot 4}$

- **allgemeiner Ansatz:**

Flächennäherung mit diesem Ansatz



$x_1^*, x_2^* \dots$ Stützstellen

→ Partition des Intervalls $[a;b]$

Flächennäherung

$$\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{f(x_1^*)}_{\text{Höhe}} + \underbrace{(x_2 - x_1) \cdot f(x_2^*)}_{\text{2. Teilrechteck}} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_n^*)}_{\text{letztes Teilrechteck}} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k^*)}$$

1. Teilrechteck

„Riemann-Summe"

Grenzprozess:

$$\lim_{\max\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\} \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k^*) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Unterteilung in „beliebig schmale Teilrechtecke"

- Wenn dieser Grenzwert existiert, so nennt man f integrierbar und der Grenzwert (eine Zahl!) wird mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \text{ bezeichnet}}$$ bestimmtes Integral über f von a bis b

obere bzw. untere Integrationsgrenze

→ Beachte: $\int f(x)\,dx$ ist eine Funktion (Stammfkt)

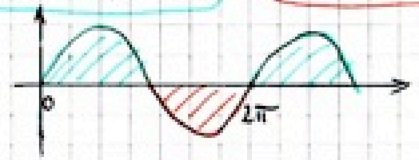
$\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine Zahl (wurde durch Flächeninhalt motiviert)

- $\boxed{\text{ist } f(x) \geq 0}$ für alle $a \leq x \leq b$, so ist das bestimmte Integral

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \text{ der Flächeninhalt}}$

Allgemein gilt:

$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\text{Fläche oberhalb}} - \boxed{\text{Fläche unterhalb}}$

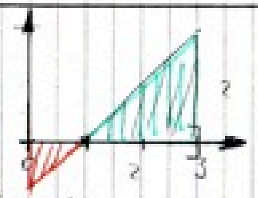


Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$ ist falsch

Beispiel $\int_0^3 x - 1 \; dx$

$f(x) = x - 1$



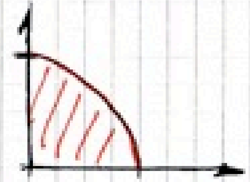
$A_1 = \frac{a \cdot b}{2}$

$A_1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$ $- 0{,}5$

$A = A_1 - A_2 = \underline{\underline{1{,}5}} \, [FE]$

Beispiel:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$



Eigenschaften des bestimmten Integrals:

1. $\int_a^b c \, dx = c \cdot (b-a)$

2. $\int_a^b f(x) \pm g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$

3. $\int_a^b c f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$

4. $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$ $\rightarrow$ Spezialfälle: $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$

   $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

5. Aus $f(x) \geq g(x)$ für alle $a \leq x \leq b$ folgt

   $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$

6. gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $a \leq x \leq b$

   dann $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$