Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = x^2 + y^2 - 1$$

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld im Bereich $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ (Abstände der Richtungselemente 0,5 in x- und y-Richtung)

b) Bestimmen Sie graphisch die drei Lösungsfunktionen durch die Punkte $y(0) = -1$, $y(0) = 0$ bzw. $y(0) = 1$.

c) Zeichnen Sie in ein neues Koordinatensystem den Euler-Polygonzug zum Anfangswert $y(0) = 0$ bei Schrittweite 0,2 jeweils 10 Schritte nach links und rechts. (Achtung, wenn man nach links geht lautet die Formel $y_{neu} = y - h \cdot F(x, y)$.)

Aufgabe 2:

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Rückstellkraft einer Metallfeder proportional dazu, wie weit die Feder aus der Ruhelage gezogen wird:

$$F = -k\,x$$

Hier ist k eine Materialkonstante der Feder und $x = x(t)$ der Abstand des Federendes von der Ruhelage zur Zeit t. Nach Newtons Bewegungsgesetz gilt andererseits

$$F = m\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2}$$

für ein Objekt der Masse m am Ende der Feder. Nach Gleichsetzen erhält man die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2} = -k\,x$$

Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass für beliebige Konstanten A und ϕ die Funktion

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung sein kann. Wie groß muss ω sein, damit es sich tatsächlich um eine Lösungsfunktion handelt? (Diese Lösung zeigt, dass das Objekt am Ende der Feder unendlich hin- und herschwingt, wenn keine Reibung vorliegt.)

Aufgabe 3:

Lösen Sie die Anfangswertprobleme

a) $\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$, $y(1) = 0$

b) $\frac{du}{dt} = \frac{2t+1}{2(u-1)}$, $u(0) = -1$

Aufgabe 4:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x^2\, y' + x\, y = 1 \qquad , \qquad x > 0 \qquad , \qquad y(1) = 2$$

Aufgabe 5:

Psychologen studieren *Lernkurven*. Eine Lernkurve ist der Graph einer Funktion $W(t)$, des Wissens eines Studenten in Abhängigkeit von seiner Ausbildungszeit. Die Ableitung dW/dt beschreibt die Änderungsgeschwindigkeit des Wissens (Wissenszuwachs). Ist M die maximale Wissenskapazität des Studenten, so kann man annehmen, dass

$$\frac{dW}{dt} = k(M - W)$$

wobei k eine positive Konstante ist. (D.h., zu Beginn lernt der Student sehr schnell. Nähert sich die Leistung der maximalen Wissenskapazität, so wird der Wissenszuwachs kleiner.)

Lösen Sie die Differentialgleichung und zeichnen Sie die Lernkurve.

Aufgabe 6: Ein ungesicherter Koffer der Masse m falle bei einem Looping aus einem Doppeldecker. Wir nehmen an, dass der Luftwiderstand proportional zur Fallgeschwindigkeit des Koffers ist. Sei $y(t)$ die Fallstrecke zur Zeit t. Dann ist $v(t) = y'(t)$ die Fallgeschwindigkeit und $a(t) = v'(t)$ die Fallbeschleunigung. Sei g die Beschleunigung durch die Schwerkraft. Dann ist die nach unten gerichtete Kraft auf den Koffer $mg - cv$ für eine geeignete Luftwiderstandskonstante c. Nach Newtons Bewegungsgesetz gilt dann

$$m\frac{dv}{dt} = m\, g - c\, v$$

a) Lösen Sie die Differentialgleichung, um die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ zu finden.

b) Wie schnell kann der Koffer maximal fallen? (Grenzgeschwindigkeit)

c) Wie tief ist der Koffer nach t Sekunden gefallen?