

**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie  $\nabla f(x, y)$ , setzen Sie den angegebenen Punkt ein und berechnen Sie die Richtungsableitung entlang des Einheitsvektors.

a)

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2y + y^2 \quad P = (0, -1) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad P = (1, -2, 1) \quad \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:**

Normieren Sie den Vektor und berechnen Sie die Richtungsableitung.

a)

$$f(x, y) = \sqrt{x - y} \quad P = (5, 1) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$g(x, y) = x e^{xy} \quad P = (-3, 0) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x, y, z) = \sqrt{xyz} \quad P = (2, 4, 2) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d)

$$g(x, y, z) = x \arctan \frac{y}{z} \quad P = (1, 2, -2) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die größtmögliche Steigung (=Richtungsableitung) im angegebenen Punkt und die Richtung, in der sie auftritt.

a)

$$f(x, y) = x e^{-y} + 3y \quad P = (1, 0)$$

b)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y} \quad P = (4, 10)$$

c)

$$f(x, y) = \cos(3x + 2y) \quad P = \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{8}\right)$$

### Aufgabe 4:

Der Yeti befindet sich auf einem Berg der Form

$$z = 1000 - 0,01 x^2 - 0,02 y^2$$

am Punkt  $(60, 100, 764)$ .

- a) In welche  $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ -Richtung muss er zuerst gehen, wenn er so viel Höhe wie möglich gewinnen will?
- b) Welchen Steigungswinkel (gemessen gegen die Horizontale) besitzt der Berg in der Richtung aus Aufgabenteil a) ?

### Aufgabe 5:

- a) (Vorbereitung) Sei  $g(y) = 4y^3 - 21y + 12,5$ . Bestimmen Sie Näherungswerte für alle drei Nullstellen dieser Funktion: Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für  $y = -3; -2,5; -2; \dots; 2$ . In welchen Intervallen liegen die Nullstellen? Wählen Sie zu jeder Nullstelle eine Startnäherung und führen Sie das Newton-Verfahren durch bis eine Genauigkeit von 4 Nachkommastellen erreicht ist.
- b) (Hauptaufgabe) Berechnen Sie die kritischen Stellen von

$$f(x, y) = 10 x^2 y - 5 x^2 - 4 y^2 - x^4 - 2 y^4$$

(Tipp: Es gibt fünf. Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teil a)). Bestimmen Sie, welche kritische Stellen Maxima, welche Minima und welche Sattelpunkte sind.

### Aufgabe 6:

Leiten Sie die Formeln zur Linearen Regression her:

Es seien Datenpunkte  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  gegeben. Nach der Methode der kleinsten Quadrate sollen bekanntlich die Steigung  $m$  und der Achsenabschnitt  $b$  einer Geraden  $y = m x + b$  berechnet werden, so dass

$$Q(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (m x_i + b))^2$$

minimal wird. Berechnen Sie die kritische Stelle dieser Funktion und zeigen Sie, dass es sich um ein Minimum handelt. (Tipp: Das Nullsetzen der partiellen Ableitungen führt auf ein lineares Gleichungssystem, welches mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden kann. Kompliziert aussehende Summen wie z.B.  $\sum x_i^2$  sind auch nur Zahlen.)

### Aufgabe 7:

(Statistik-Aufgabe - eine Abgabe ist nicht erforderlich. Sofern noch nicht erfolgt: Jeder soll diese Zeichnung anfertigen. Größer ist besser. )

Ein fairer Münzwurf werde 10-mal durchgeführt. Die Zufallsvariable  $B$  zähle wie oft *Kopf* geworfen wird.

- a) Berechnen Sie die binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten  $P(B = k)$  für  $k = 0, 1, \dots, 10$  gemäß der Formel

$$P(B = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

Zeichnen Sie ein Wahrscheinlichkeitshistogramm (d.h. in ein Koordinatensystem für jeden Wert  $k$  ein Rechteck mit Grundseite von  $k - 0,5$  bis  $k + 0,5$  und Höhe  $P(B = k)$ ).

- b) Berechnen Sie die Funktionswerte der Normalverteilungsdichte

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2,5}} e^{-\frac{(t-5)^2}{2 \cdot 2,5}}$$

für  $t = 0, 1, \dots, 10$  und zeichnen Sie die Funktion in dasselbe Koordinatensystem.