Aufgabe 1:

Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$, setzen Sie den angegebenen Punkt ein und berechnen Sie die Richtungsableitung entlang des Einheitsvektors.

a)

$$f(x,y) = x^3 - 4x^2y + y^2 \qquad P = (0,-1) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 \qquad P = (1,-2,1) \qquad \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Normieren Sie den Vektor und berechnen Sie die Richtungsableitung.

a)

$$f(x,y) = \sqrt{x-y} \qquad P = (5,1) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$g(x,y) = x\,e^{xy} \qquad P = (-3,0) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x,y,z) = \sqrt{xyz} \qquad P = (2,4,2) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d)

$$g(x,y,z) = x \arctan\frac{y}{z} \qquad P = (1,2,-2) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die größtmögliche Steigung (=Richtungsableitung) im angegebenen Punkt und die Richtung, in der sie auftritt.

a)
$$f(x, y) = x\, e^{-y} + 3y \qquad P = (1, 0)$$

b)
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y} \qquad P = (4, 10)$$

c)
$$f(x, y) = \cos{(3x + 2y)} \qquad P = (\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{8})$$

Aufgabe 4:

Der Yeti befindet sich auf einem Berg der Form

$$z = 1000 - 0,01\, x^2 - 0,02\, y^2$$

am Punkt $(60, 100, 764)$.

a) In welche $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$-Richtung muss er zuerst gehen, wenn er so viel Höhe wie möglich gewinnen will?

b) Welchen Steigungswinkel (gemessen gegen die Horizontale) besitzt der Berg in der Richtung aus Aufgabenteil a) ?

Aufgabe 5:

a) (Vorbereitung) Sei $g(y) = 4y^3 - 21\, y + 12,5$. Bestimmen Sie Näherungswerte für alle drei Nullstellen dieser Funktion: Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $y = -3;\ -2,5;\ -2; \ldots;\ 2$. In welchen Intervallen liegen die Nullstellen? Wählen Sie zu jeder Nullstelle eine Startnäherung und führen Sie das Newton-Verfahren durch bis eine Genauigkeit von 4 Nachkommastellen erreicht ist.

b) (Hauptaufgabe) Berechnen Sie die kritischen Stellen von

$$f(x, y) = 10\, x^2\, y - 5\, x^2 - 4\, y^2 - x^4 - 2\, y^4$$

(Tipp: Es gibt fünf. Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teil a)). Bestimmen Sie, welche kritische Stellen Maxima, welche Minima und welche Sattelpunkte sind.

Aufgabe 6:

Leiten Sie die Formeln zur Linearen Regression her:
Es seinen Datenpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n) gegeben. Nach der Methode der kleinsten Quadrate sollen bekanntlich die Steigung m und der Achsenabschnitt b einer Geraden $y = m\,x + b$ berechnet werden, so dass

$$Q(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (m\,x_i + b))^2$$

minimal wird. Berechnen Sie die kritische Stelle dieser Funktion und zeigen Sie, dass es sich um ein Minimum handelt. (Tipp: Das Nullsetzen der partiellen Ableitungen führt auf ein lineares Gleichungssystem, welches mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden kann. Kompliziert aussehende Summen wie z.B. $\sum x_i^2$ sind auch nur Zahlen.)

Aufgabe 7:

(Jeder soll diese Zeichnung anfertigen und zur Übungsstunde mitbringen. Größer ist besser. Eine Abgabe dieser Aufgabe ist nicht erforderlich.)
Ein fairer Münzwurf werde 10-mal durchgeführt. Die Zufallsvariable B zähle wie oft *Kopf* geworfen wird.

a) Berechnen Sie die binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten $P(B = k)$ für $k = 0$, 1,..., 10 gemäß der Formel

$$P(B = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

Zeichnen Sie ein Wahrscheinlichkeitshistogramm (d.h. in ein Koordinatensystem für jeden Wert k ein Rechteck mit Grundseite von $k - 0,5$ bis $k + 0,5$ und Höhe $P(B = k)$).

b) Berechnen Sie die Funktionswerte der Normalverteilungsdichte

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2,5}} e^{-\frac{(t-5)^2}{2 \cdot 2,5}}$$

für $t = 0$, 1,..., 10 und zeichnen Sie die Funktion in dasselbe Koordinatensystem.