Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

14. August 2002

Axiome der reellen Zahlen & deren Bedeutung

(Einige dieser Axiome hängen miteinander zusammen)

1. Axiome der Verknüpfung

1.1 Aus a, b = reelle Zahlen folgt: $a + b = c$, oder: $c = a + b$;
1.2 Sind: a, b reelle Zahlen, so existiert: $a + x = b$ bzw.: $y + a = b$;
1.3 Es gibt eine „0“ mit: $a + 0 = a$ und: $a = a + 0$ (= das neutrale Element der Addition);
1.4 Es ist die Multiplikation: $a * b = c$ bzw.: $c = a * b$ definiert und erklärt;
1.5 Sind: a, b reelle Zahlen und a verschieden von „0“, so existiert: $a*x = b$ bzw.: $y*a = b$;
1.6 Es existiert eine Zahl „1“, so daß: $a*1 = a$ bzw.: $1*a = a$ (= das neutrale Element der Multiplikation);

2. Axiome der Rechnung

2.1 Aus a, b, c = reelle Zahlen folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$ (= Assoziativgesetz);
2.2 $(a + b) = (b + a)$ (= Kommutativgesetz);
2.3 $a * (b * c) = (a * b) * c$ (= Assoziativgesetz);
2.4 $a *(b + c) = a * b + a * c$ (= Distributivgesetz);
2.5 $(a + b) * c = a * c + b * c$ (= Distributivgesetz);
2.6 $a * b = b * a$ (= Kommutativgesetz);

3. Axiome der Anordnung

3.1 Aus: $a > b$ und: $b > a$ folgt: Es gibt keine Zahl a mit: $a > a$;
3.2 Aus: $a > b$ und: $b > c$ folgt: $a > c$;
3.3 Aus: $a > b$ folgt: $a + c > b + c$ (= Monotoniegesetz);
3.4 Aus: $a > b$ und: $c > 0$ folgt: $a * c > b * c$, sowie: $c * a > c * b$ (= Monotoniegesetz);

3. Axiome der Stetigkeit

4.1 Aus: $a > 0$ und: $b > 0$ folgt: $a + a + ... + a > b$ (= Axiom des Archimedes);
4.2 Prinzip der Vollständigkeit: Diese Zahlen bilden ein System, welches unter diesen Axiomen keinerlei Erweiterung mehr fähig ist.

Anmerkung: 1. Eine Erstausgabe mag u. a. Druckfehler enthalten.
2. Diese Axiome der reellen Zahlen werden unterschiedlich kompakt in der Literatur angegeben.
3. Über den reellen Zahlen existieren noch die komplexen Zahlen, jedoch müssen einige dieser Axiome dabei geopfert werden. Die komplexen Zahlen folgen u. a. aus der Lösung einer Gleichung wie: $x^2 + 1 = 0$.