**L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 1, Sommersemester 2002, 03. 07. 2002, Haus 3, R. 325, 08 – 12 Uhr**

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB WI / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

**Allgemeine Hinweise:** 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Die Termine für die Klausuren 2 und 3 werden bekannt gegeben.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

**Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:**

**Aufgaben und Ihre Lösungen:**

**A. 01:** Zeigen Sie mittels der Potenzreihenentwicklung, daß: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ !

**A. 02:** Lösen Sie: $y' + y = 0$ mit : $y(3) = 2$ !

**B. 03:** Geben Sie zur Matrix: **A** die inverse Matrix an: **A =** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ **!**

**B. 04:** Lösen Sie das nachfolgende Optimierungsproblem grafisch: Maximieren von:

$$\left\{ G\left(x_1; x_2\right) = 12x_1 + 15x_2 \middle| \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} \wedge x_1; x_2 \geq 0 \right\} \;!$$

**C. 05:** Geben Sie die relativen Extremwerte an von: $f\left(x, y\right) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ !

**C. 06:** Untersuchen Sie ( Lagrange ) auf Extremwerte: $z = x^2 + 2xy$ mit den Nebenbedingungen: $y + 1{,}5x = 6$ !

**D. 07:** Es gebe fünf ( = 5 ) verschiedene Teile, in die je eins ( = 1 ) von zwei ( = 2 ) Öffnungen gehören. Wie viele Auswahlmöglichkeiten sind vorhanden?

**D. 08:** $f(x)$ laute := $\begin{cases} 3x^2 & \wedge\ 0 < x < a \\ 0; & sonst \end{cases}$. Geben Sie an, wann: f ( x ) Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist.

| |
|---|
| **E. 09:** In einer Urne seien: „25 rote“ und: „50 grüne“ Kugeln, davon werden: 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Geben Sie tabellarisch die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die roten unter den gezogenen Kugeln; den Namen der Verteilung und die Größe der Parameter an ! ( $f_X(x) = \binom{n}{x} \cdot \Theta^x \cdot (1-\Theta)^{n-x}$; für : $x = 0,1,...$ [$\Theta$ = Theta, griechisch ]. ) |
| **E. 10:** Geben Sie zu den vorgegebenen zehn Merkmalen ( in alphabetischer Reihenfolge ) die Skala an und ob sie häufbar sind: „Geburtsdatum; Güteklasse von Hotels; Hobby von Männern; Kinderzahl von Personen; Körpergröße von Studentinnen; Matrikelnummer von Studenten; Religionszugehörigkeit; Sparguthaben von Familien; Ursache von Unfällen; Wertungsnoten im Eistanz“. |

**Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!**

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/B/C/D/E); Bestanden: ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: ( 01/02/03/04/05/06/07/08/09/10 ); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 14.08.2002

**L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 1, Sommersemester 2002, 03. 07. 2002, Haus 3, R. 325, 08 – 12 Uhr**

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB WI / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

**Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:**

**A. 01:** Zeigen Sie mittels der Potenzreihenentwicklung, daß: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ !

**CA**: 39.21: Es ist die McLaurien Entwicklung: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ; mit: x = 1 folgt das Ergebnis.

**A. 02:** Lösen Sie: $y' + y = 0 \quad \text{mit}: y(3) = 2$ !

**DGl:** 3.30 + 3.177: Das ist eine separable Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingungen:

$$y' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \Rightarrow \ln y = -x + C \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-x}$$

$$(\text{mit}: y(3) = 2); \text{Berechnung der Konstanten}: \text{K};\ y(3) = 2 = K \cdot e^{-3} \Rightarrow K = 2 \cdot e^{3} \Rightarrow y(x) = 2e^{3-x}$$

**B. 03:** Geben Sie zur Matrix: **A** die inverse Matrix an: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ **!**

**LA:**4.85: Die Berechnung erfolgt über den Gauß – Jordan – Algorithmus wie folgt:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}; \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}; q.e.d.$$

**B. 04:** Lösen Sie das nachfolgende Optimierungsproblem grafisch: Maximieren von:

$$\left\{ G(x_1; x_2) = 12x_1 + 15x_2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} \wedge x_1; x_2 \ge 0 \right\} \ !$$

**Sch 1:** ( S. 83; 2 + 165 ): $x_1 = 80; x_2 = 240; \wedge G(80;240) = 4560$

**C. 05:** Geben Sie die relativen Extremwerte an von: $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ !

**CA.** 43.25:

$$f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \Rightarrow f_x = 2 - 2x = 0 \wedge f_y = 4 - 2y \Rightarrow x = 1 \wedge y = 2; \Leftrightarrow P(1;2;2)$$

$$f_{xx} = -2 \wedge f_{yy} = -2 \wedge f_{xy} = 0 \Rightarrow D(x;y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 - 0 > 0 \Rightarrow P(1;2;2) = Maximum$$

**C. 06:** Untersuchen Sie ( Lagrange ) auf Extremwerte: $z = x^2 + 2xy$ mit den Nebenbedingungen: $y + 1{,}5x = 6$ !

**Sch 1**: S.57;13.2.:1.+S.138: a) Die Extremwerte werden errechnet mittels:

$$z = x^2 + 2xy = f(x,y) \wedge g(x,y) = 0 = y + 1{,}5x - 6 \Rightarrow v(x,y,\lambda) = x^2 + 2xy - \lambda \cdot (y + 1{,}5x - 6) \Rightarrow$$

$$v_x(x,y,\lambda) = 0 = 2x + 2y - \lambda \cdot (1{,}5)(1); v_y(x,y,\lambda) = 0 = 2x - \lambda(2); v_\lambda(x,y,\lambda) = 0 = -(y + 1{,}5x - 6)(3)$$

$$\Rightarrow \quad (2): \lambda = 2x; \Rightarrow \begin{array}{ll} -x + 2y = 0 & (1) \\ 1{,}5x + y = 6 & (3) \end{array} \Rightarrow x = +3; y = +1{,}5 \Rightarrow P(+3; +1{,}5; \quad +18)$$

ist Extremwert, ob Maximum oder Minimum, ist hiermit noch nicht festgestellt.

**D. 07:** Es gebe fünf ( = 5 ) verschiedene Teile, in die je eins ( = 1 ) von zwei ( = 2 ) Öffnungen gehören. Wie viele Auswahlmöglichkeiten sind vorhanden?

**Sch 1**: S.26; 5.3; 2 + S. 111: Es gibt: $\binom{5}{2} \cdot 2\,! = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 2 = 20$ Auswahlmöglichkeiten.

**D. 08:** $f(x)$ laute := $\begin{cases} 3x^2 & \wedge\ 0 < x < a \\ 0; & sonst \end{cases}$. Geben Sie an, wann: f ( x ) Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist.

**Sch 2:** ( + HA Nr. 78):S.58, 7.1.10+S.132: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für} : 0 < x < a \\ 0 & sonst \end{cases}$ ist Dichtefunktion einer Zufallsvariablen, wenn gilt:

$$1 = \int_{x=0}^{x=a} f(x)dx \Leftrightarrow 1 = \int_{x=0}^{x=a} \left(3 \cdot x^2\right)dx = x^3\Big|_{x=0}^{x=a} = a^3 - 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

**E. 09:** In einer Urne seien **25 rote** und **50 grüne Kugeln**, davon werden: **4 Kugeln** mit Zurücklegen gezogen. Geben Sie tabellarisch die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die **roten** unter den **gezogenen Kugeln**; den Namen der Verteilung und die Größe der Parameter an ! ( $f_X(x) = \binom{n}{x} \cdot \Theta^x \cdot (1 - \Theta)^{n-x}$; für : $x = 0,1,...$[Θ = Theta, griechisch ]. )

**Sch 3:** S.83 + S. 242: Binomialverteilung mit: n = 4 und: Θ = 3 :⇒

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_X(x_i)$ | $\frac{16}{81}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{24}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{1}{81}$ |

**E. 10:** Geben Sie zu den vorgegebenen zehn Merkmalen ( in alphabetischer Reihenfolge ) die Skala an und ob sie häufbar sind: „Geburtsdatum; Güteklasse von Hotels; Hobby von Männern; Kinderzahl von Personen; Körpergröße von Studentinnen; Matrikelnummer von Studenten; Religionszugehörigkeit; Sparguthaben von Familien; Ursache von Unfällen; Wertungsnoten im Eistanz“.

**Sch 2: S.11 + 100:**

**Geburtsdatum** = Intervallskala, nicht häufbar; **Güteklasse von Hotels** = Rangskala, nicht häufbar; **Hobby von Männern** = Nominalskala, häufbar; **Kinderzahl von Personen** = Absolutskala, nicht häufbar; **Körpergröße von Studentinnen** = Verhältnisskala, nicht häufbar; **Matrikelnummer von Studenten** = Nominalskala, nicht häufbar; **Religionszugehörigkeit** = Nominalskala, nicht häufbar; **Sparguthaben von Familien** = Verhältnisskala, nicht häufbar; **Ursache von Unfällen** = Nominalskala, häufbar; **Wertungsnoten im Eistanz** = Ordinalskala, häufbar“.

**Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:**

**CA:** 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

**DGl:** 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

**LA:** 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

**Sch 1:** Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, J. Schwarze**,** 5. Auflage

**Sch 2:** Aufgabensammlung zur Statistik, J. Schwarze**,** 4. Auflage

**Sch 3:** Grundlagen der Statistik II, J. Schwarze**,** 7. Auflage