Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB I / IW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 2, Sommersemester 2002, 18. 09. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 – 12 Uhr.

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Der Termin für die Klausur Nr. 3 wird bekannt gegeben.

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Gegeben ist :

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & + 2 \cdot x_2 & + 4 \cdot x_3 & = 24 \\ & x_2 & + 2 \cdot x_3 & = 11 \\ x_1 & + 2 \cdot x_2 & + 5 \cdot x_3 & = 28 \end{array}$$

. Geben Sie die Matrixform und die inverse Matrix an !

A. 02: Lösen Sie das ganzzahlige Maximierungsproblem grafisch:

$$z(x_1; x_2) = 10 \cdot x_1 + x_2 \wedge 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 11 \wedge x_1; x_2 > 0 \wedge x_1; x_2 \in \mathbf{N} \; !$$

B. 03: Geben Sie das absolute Maximum und Minimum an von: $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ im Intervall $:[0, 2\pi]$!

B. 04: Lösen Sie: $y'(x) + 2 \cdot x \cdot y(x) = 0 \wedge y(3) = 4$!

C. 05: Berechnen Sie den Wert des Integrals: $\int_2^3 \int_1^5 (x + 2y) \cdot dx \cdot dy$!

C. 06: Berechnen Sie (Lagrange) die Extrema: $f(x, y, z) = 8x + 2xy + \frac{1}{4}z^2$ Nebenbedingungen : $z + 3y - 2x = 4$!

D. 07: Es gebe bei einem Herstellungsprozeß die Fehler: A und: B mit den Wahrscheinlichkeiten: 0,1 und: 0,15. Beide Fehler treten gleichzeitig mit der Wahrscheinlichkeit: 0,05 auf. Schon mit nur einem Fehler kommt der Prozeß zum Erliegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen fehlerfreien Prozeß zu haben ?

D. 08: In einer Urne seien fünf nummerierte Kugeln von: 1 bis: 5. Die Reihenfolge der Ziehungen ohne Zurücklegen spiele keine Rolle. Wie viele Kombinationen gibt es beim dreimaligen Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen ?

E. 09: Folgende Noten seien gegeben: 3, 1, 2, 2, 1, 4, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 6, 2, 3, 2. Geben Sie die Häufigkeitsverteilung und die Summenhäufigkeitsverteilung numerisch und grafisch an !
E. 10: Schätzen Sie : μ der Dichte der Stichprobe : $L\left(x_i ; \mu\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$ mit der Maximum – Likelihood – Methode (i = 1, 2, ..., n) !

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 29.09.2002

L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 2, Sommersemester 2002, 18. 09. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 – 12 Uhr.

Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

A. 01: Gegeben ist : $\begin{array}{llll} x_1 & +2\cdot x_2 & +4\cdot x_3 & =24 \\ & x_2 & +2\cdot x_3 & =11 \\ x_1 & +2\cdot x_2 & +5\cdot x_3 & =28 \end{array}$. Geben Sie die Matrixform und die inverse Matrix an !

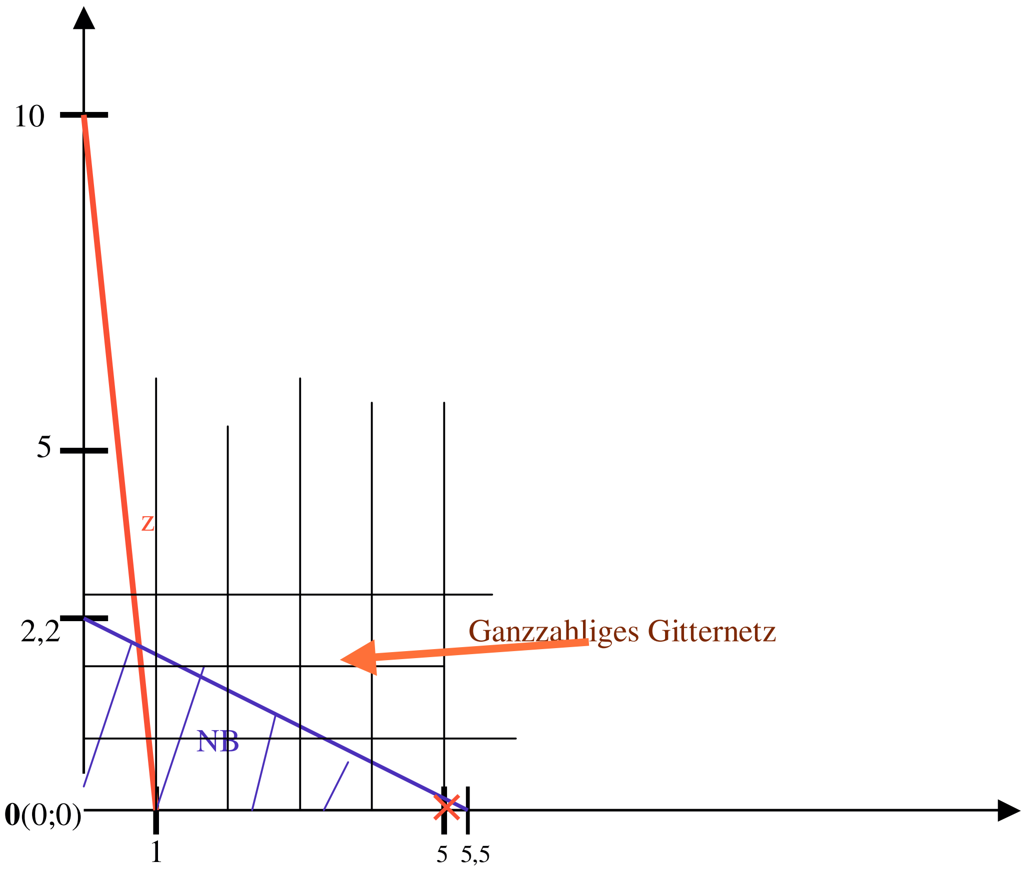
Sch: 18.3, 4; S. 75 + S. 157: Die inverse Matrix zu: **A** errechnet sich nach einigen Zwischenschritten:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\11\\28\end{pmatrix}\wedge\left.\begin{matrix}1&2&4\\0&1&2\\1&2&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&-2&0\\2&1&-2\\-1&0&1\end{matrix}=\mathbf{E}\,\middle|\,\mathbf{A}^{-1}$$

A. 02: Lösen Sie das ganzzahlige Maximierungsproblem grafisch:

$$z(x_1;x_2)=10\cdot x_1+x_2\wedge 2\cdot x_1+5\cdot x_2\le 11\wedge x_1;x_2>0\wedge x_1;x_2\in\mathbf{N}\,!$$

B: S. 124 + HA Nr. 43 vom 14. 05. 2002: Die Darstellung ergibt mit den genannten Angaben als grobe Skizze :



Für die Zielfunktion wird willkürlich : Z = 10 gewählt; die Schnittpunkte mit den Achsen lauten: S 1 (1;0) und: S 2 (0;10).

Für die eingrenzende Gerade der Nebenbedingungen gilt: SNB1 (5,5; 0); SNB2 (0; 2,2).Die Lösung mit reellen Zahlen lautet: Zmax = (5,5; 0) = 55. Die Lösung für ganzzahlige Werte liegen auf den Schnittpunkten des Gitters, die alle berechnet werden müssen. Es ergibt sich als optimale Lösung: Popt (5; 0) mit: **Zopt = 50.**

B. 03: Geben Sie das absolute Maximum und Minimum an von: $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$ im Intervall : $[0,2\pi]$!

C: 13.32: Dazu ist die erste und zweite Ableitung nötig: $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x\wedge f''(x)=\sin x$

$\Rightarrow 0=\frac{1}{2}-\cos x \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3} \wedge x_2=\frac{5\pi}{3}; in: [0,2\pi]; \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3}>0 \wedge \sin\frac{5\pi}{3}<0 \Leftrightarrow$	$Maximum\ in: x_1=\frac{5\pi}{3}; f(x_1)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $Minimum\ in: x_1=\frac{\pi}{3}; f(x_2)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 04: Lösen Sie: $y'(x)+2\cdot x\cdot y(x)=0 \wedge y(3)=4$!

DGl.:5.9+5.104: Die Integration nach Trennung der Variablen ergibt: $y(x)=C\cdot e^{-x^2}$: Das Einsetzen der Anfangswerte:

$$y_A(x)=C\cdot e^{-x^2} \Rightarrow 4=C\cdot e^{-(3)^2}=C\cdot e^{-9} \Rightarrow C=4\cdot e^{+9} \Rightarrow y_S(x)=4\cdot e^{+9}\cdot e^{-x^2}=4\cdot e^{-\left(x^2-9\right)}$$

C. 05: Berechnen Sie den Wert des Integrals: $\int_2^3\int_1^5 (x+2y)\cdot dx\cdot dy$!

C: 44.1: Es wird nacheinander integriert: $\int_2^3\int_1^5 (x+2y)\cdot dx\cdot dy = \int_1^5 (x+2y)dx = 12+8y \Rightarrow \int_2^3 (12+8y)dy = 32$

C. 06: Berechnen Sie (Lagrange) die Extrema: $f(x,y,z)=8x+2xy+\frac{1}{4}z^2$ Nebenbedingungen : $z+3y-2x=4$!

Oh: 8.7. a) S. 317 + S. 394:

$$f(x,y,z,\lambda)=8x+2xy+\frac{1}{4}z^2-\lambda\cdot(z+3y-2x-4) \Rightarrow 1.) f_x=0=8+2y+2\lambda;\ 2.) f_y=0=2x-3\lambda$$

$$3.) f_z=0=\frac{1}{2}z-\lambda;\ 4.) f_\lambda=0=z+3y-2x-4 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}z; \Rightarrow \begin{array}{rrrl} -2x & +3y & +z & =4 \\ +2x & & -\frac{3}{2}z & =0 \\ & +2y & +z & =-8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -6 \\ y & = & 0 \\ z & = & -8 \end{array};\ f(\min)=-32$$

D. 07: Es gebe bei einem Herstellungsprozeß die Fehler: A und: B mit den Wahrscheinlichkeiten: 0,1 und: 0,15. Beide Fehler treten gleichzeitig mit der Wahrscheinlichkeit: 0,05 auf. Schon mit nur einem Fehler kommt der Prozeß zum Erliegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen fehlerfreien Prozeß zu haben ?

Schw: S.51;6.0.12+S.127: Die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerfreien Prozeß, ist gleich: 1 – (Wahrscheinlichkeit für einen Fehler):

$$\Rightarrow \mathbf{P}(\text{fehlerfrei})=1-\mathbf{P}(\text{Fehler})=1-\mathbf{P}(\text{A}\cup\text{B})=1-\{\mathbf{P}(\text{A})+\mathbf{P}(\text{B})-\mathbf{P}(\text{A}\cap\text{B})\}\Rightarrow$$
$$\mathbf{P}(\text{fehlerfrei})=1-\{0{,}1+0{,}15-0{,}05\}=0{,}8=80\%$$

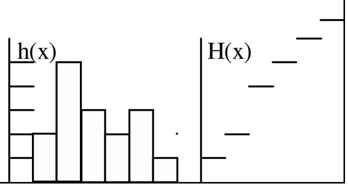
D. 08: In einer Urne seien fünf nummerierte Kugeln von: 1 bis: 5. Die Reihenfolge der Ziehungen ohne Zurücklegen spiele keine Rolle. Wie viele Kombinationen gibt es beim dreimaligen Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen ?

Sch: S. 28; 5. a. + S. 112: Die Zahl der Kombinationen ist gegeben durch: $\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$

E. 09: Folgende Noten seien gegeben: 3, 1, 2, 2, 1, 4, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 6, 2, 3, 2. Geben Sie die Häufigkeitsverteilung und die Summenhäufigkeitsverteilung numerisch und grafisch an !

Schw: S.13, 2.1.1 + S.101:

Note	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	2	5	3	2	3	1
Summenhäufigkeit	2	7	10	12	15	16



E. 10: Schätzen Sie : μ der Dichte der Stichprobe : $L\left(x_i;\mu\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$ mit der

Maximum – Likelihood – Methode (i = 1, 2, ..., n) !

Schwa: S. 153 + Vorlesung: Die logarithmierte Likelihood – Funktion, die dann partiell differenziert wird, lautet:

$$L\left(x_i;\mu\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\Rightarrow \ln L\left(x_i;\mu\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2-\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ln L\left(x_i;\mu\right)}{\partial\mu}=0=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right\}\Rightarrow\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

B: Operations Research; R. Bronson; Schaum's outlines; 2. Edition

C: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

DGl: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

HA: Hausaufgaben mit Nummer und Datum des Sommersemesters 2002;

Oh: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, D. Ohse; 4. Auflage; Vahlen;

Sch: Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; J. Schwarze; nwb; 5. Auflage;

Schw: Aufgabensammlung zur Statistik; J. Schwarze; nwb; 4. Auflage;

Schwa: Grundlagen der Statistik II; J. Schwarze; nwb; 7. Auflage;

Vorlesung: Beispiel oder Übung aus der Vorlesung des Sommersemesters 2002.