

**L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 3 zum Sommersemester 2002 am 29. 01. 2003, R. 1117, 09 – 11 Uhr**  
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

**Allgemeine Hinweise:** 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; **9. Dies ist die letzte Prüfungsklausur.**

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

**Aufgaben und Ihre Lösungen:**

**A. 01:** Lösen Sie das ganzzahlige Maximierungsproblem grafisch:  
$$z(x_1; x_2) = 10 \cdot x_1 + x_2 \wedge 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 11 \wedge x_1; x_2 > 0 \wedge x_1; x_2 \in \mathbf{N} !$$

**A. 02:** Gegeben sei der Vektor:  $v = (4; -2; -3; 8)$  des  $\mathbf{V}^4$ . Berechnen Sie dessen Norm und geben Sie ihm die Länge : 1 !

**B. 03:** Berechnen Sie für :  $y'(x) - y(x) = e^x$  mittels Integration !

**B. 04:** Geben Sie das absolute Maximum und Minimum an von:  $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$  im Intervall :  $[0, 2\pi]$ !

**C. 05:** Ermitteln Sie für:  $f(x) = x^2$  in :  $[-\pi; +\pi]$  den Fourierkoeffizienten:  $a_0$  !

**C. 06:** Berechnen Sie den Wert des Integrals:  $\int_1^5 \int_1^5 (x + 2y) \cdot dx \cdot dy$  !

**D. 07:** In einer Urne seien fünf nummerierte Kugeln von: 1 bis: 5. Die Reihenfolge der Ziehungen ohne Zurücklegen spiele keine Rolle. Wie viele Kombinationen gibt es beim dreimaligen Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen ?

**D. 08:** Wie lauten bei beliebigen Ereignissen: „A“ und : „B“ die Wahrscheinlichkeit für die Aussagen:  
a)  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ ; b)  $0 < \mathbf{P}(A) < 1$ ; c)  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ ; d)  $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$ ?

**E. 09:** Schätzen Sie :  $\mu$  der Dichte der Stichprobe :  $L(x_i; \mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$  mit der Maximum  
– Likelihood – Methode (  $i = 1, 2, \dots, n$  ) !

**E. 10:** Eine Münze werde: 4-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß „Zahl“ : 1 -; 2 -; 3 - mal auftritt ?

**Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!**

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen ( A / B / C / D /

Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: ( 01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10 )

Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

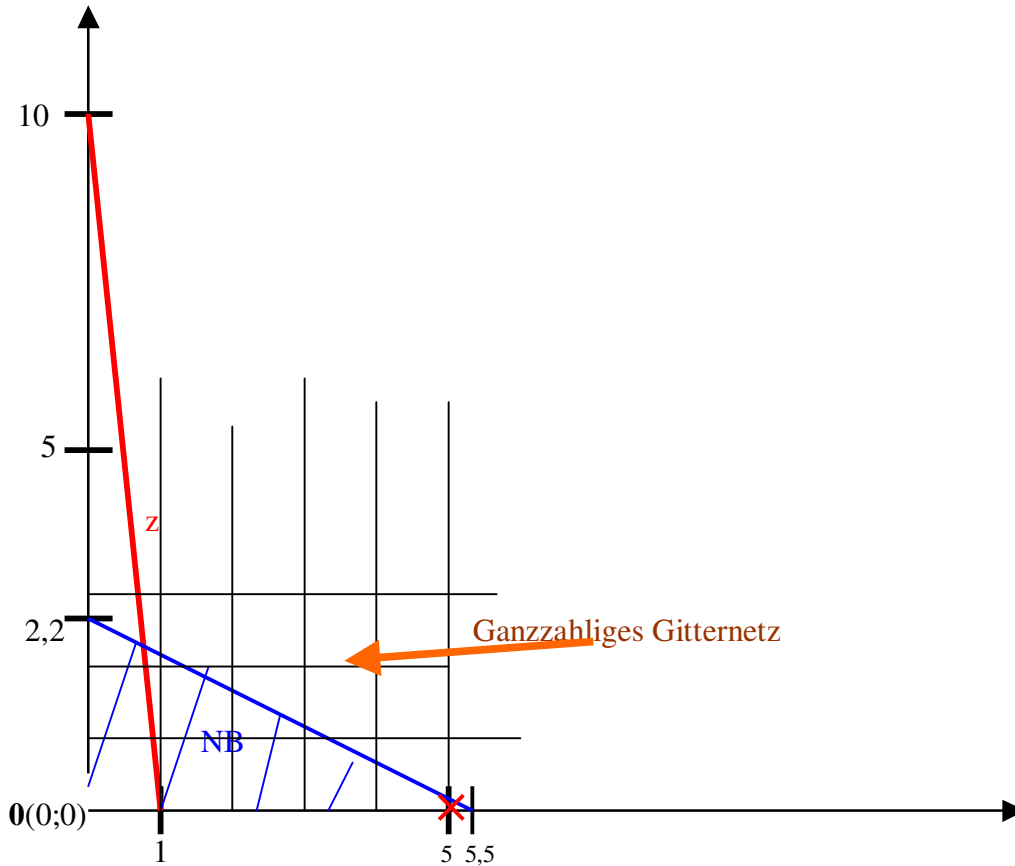
Klaus R. F. Bätjer

Wildau, den 23.03.2003

**A. 01:** Lösen Sie das ganzzahlige Maximierungsproblem grafisch:

$$z(x_1; x_2) = 10 \cdot x_1 + x_2 \wedge 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 11 \wedge x_1; x_2 > 0 \wedge x_1; x_2 \in \mathbf{N} !$$

**B: S. 124 + HA Nr. 43 vom 14. 05. 2002:** Die Darstellung ergibt mit den genannten Angaben als grobe Skizze :



Für die Zielfunktion wird willkürlich :  $Z = 10$  gewählt; die Schnittpunkte mit den Achsen lauten:  $S_1 (1; 0)$  und:  $S_2 (0; 10)$ .

Für die eingrenzende Gerade der Nebenbedingungen gilt:  $SNB_1 (5,5; 0)$ ;  $SNB_2 (0; 2,2)$ . Die Lösung mit reellen Zahlen lautet:  $Z_{\max} = (5,5; 0) = 55$ . Die Lösung für ganzzahlige Werte liegen auf den Schnittpunkten des Gitters, die alle berechnet werden müssen. Es ergibt sich als optimale Lösung:  $P_{opt} (5; 0)$  mit:  **$Z_{opt} = 50$** .

**A. 02:** Gegeben sei der Vektor:  $v = (4; -2; -3; 8)$  des  $\mathbf{V}^4$ . Berechnen Sie dessen Norm und geben Sie ihm die Länge : 1 !

**HA Nr. 09 v. 08. 04. 2002:** Die Norm ist gegeben durch:  $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ ; sein Einheitsvektor durch:  $v_e = \frac{v}{\|v\|}$ .

$$\Rightarrow \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{16 + 4 + 9 + 64} = \sqrt{93} ; \text{ und: } v_e = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{93}} \cdot (4; -2; -3; 8) = \left( \frac{4}{\sqrt{93}}; \frac{-2}{\sqrt{93}}; \frac{-3}{\sqrt{93}}; \frac{8}{\sqrt{93}} \right)$$

**B. 03:** Berechnen Sie für :  $y'(x) - y(x) = e^x$  mittels Integration !

**HA Nr. 37 v. 04. 05. 2002:** Die DGl. 1. Ordnung:  $y' - y = e^x$  mit der allgemeinen Lösung:

$$y(x) = A \cdot e^{\int dx} + e^{\int dx} \cdot \left[ \int e^x \cdot e^{-\int dx} \cdot dx \right] \Rightarrow y(x) = A \cdot e^x + e^x \cdot \left[ \int e^x \cdot e^{-x} \cdot dx \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = A \cdot e^x + e^x \cdot \left[ \int 1 \cdot dx \right] \Rightarrow A \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x \cdot (x + A)$$

**B. 04:** Geben Sie das absolute Maximum und Minimum an von:  $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$  im Intervall:  $[0, 2\pi]$ !

**C: 13.32:** Dazu ist die erste und zweite Ableitung nötig:  $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x \wedge f''(x) = \sin x$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} - \cos x \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} \wedge x_2 = \frac{5\pi}{3}; \text{ in } [0, 2\pi]; \Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} > 0 \wedge \sin \frac{5\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow$$

Maximum in:  $x_1 = \frac{5\pi}{3}; f(x_1) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Minimum in:  $x_1 = \frac{\pi}{3}; f(x_2) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

**C. 05:** Ermitteln Sie für:  $f(x) = x^2$  in:  $[-\pi; +\pi]$  den Fourierkoeffizienten:  $a_0$ !

**HA Nr. 37 v. 04. 05. 2002:**  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$ ;  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx$ ;  $f(x) = x^2$  in:  $[-\pi; +\pi]$ .

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{6\pi} \cdot (\pi^3 - [-\pi]^3) = \frac{\pi^2}{3}$$

**C. 06:** Berechnen Sie den Wert des Integrals:  $\int_1^{35} \int_1^{35} (x+2y) \cdot dx \cdot dy$ !

**CA: 44.1:** Es wird nacheinander integriert:  $\int_1^{35} \int_1^{35} (x+2y) \cdot dx \cdot dy = \int_1^{35} (x+2y) dx = 12 + 8y \Rightarrow \int_1^{35} (12 + 8y) dy = 32$

**D. 07:** In einer Urne seien fünf nummerierte Kugeln von: 1 bis: 5. Die Reihenfolge der Ziehungen ohne Zurücklegen spiele keine Rolle. Wie viele Kombinationen gibt es beim dreimaligen Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen?

**Sch: S. 28; 5. a. + S. 112:** Die Zahl der Kombinationen ist gegeben durch:  $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$  (u. a. durch Abzählen).

**D. 08:** Wie lauten bei beliebigen Ereignissen: „A“ und: „B“ die Wahrscheinlichkeit für die Aussagen:

a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ; b)  $0 < P(A) < 1$ ; c)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ; d)  $0 \leq P(A) \leq 1$ ?

**HA Nr. 69 v. 11. 06. 2002:** a) gilt ausschließlich für disjunkte Ereignisse: „A“ und: „B“; b) ist eine falsche Aussage; c) und d) sind korrekte Antworten für die Wahrscheinlichkeit bei beliebig gegebenen Ereignissen: „A“ und: „B“.

**E. 09:** Schätzen Sie:  $\mu$  der Dichte der Stichprobe:  $L(x_i; \mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$  mit der

Maximum – Likelihood – Methode ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!

**Schwa: S. 153 + Vorlesung:** Die logarithmierte Likelihood – Funktion, die dann partiell differenziert wird, lautet:

$$L(x_i; \mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \Rightarrow \ln L(x_i; \mu) = \sum_{i=1}^n \left\{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ln L(x_i; \mu)}{\partial \mu} = 0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left\{\sum_{i=1}^n x_i - n\mu\right\} \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

**E. 10:** Eine Münze werde: 4-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß „Zahl“: 1 -; 2 -; 3 - mal auftritt?

**HA Nr.86 v. 27. 06. 02:** Die Binomialverteilung ergibt mit:  $n = 4$  und:  $\alpha = 0,5$ ; damit folgt durch Rechnung für das

Auftreten von: „Zahl“:	$f_X = \binom{n}{x} \cdot \alpha^x \cdot (1 - \alpha)^{n-x}$ ;	für: $x = 0, 1, 2, \dots, n$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
			0,25	0,375	0,25

**Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:**

**C:** 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

**DGI:** 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

**LA:** 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;