L 02 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 1, Sommersemester 2003, 30. 06. 2003, Haus 3, R. 325, 15 – 17 Uhr

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, Fachbereich IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Die Termine für die Klausuren 2 und 3 werden bekannt gegeben.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Der Radius einer Kugel ändere sich mit: 3 Millimetern pro Sekunde. Wie schnell ändert sich das Volumen, wenn die Kugeloberfläche: 10 Quadratmillimeter beträgt ?

A. 02: Lösen Sie: $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$ **!**

B. 03: Eine Firma habe 8 Fabriken, von denen 2 stillgelegt werden sollen. Wie viele derartige Möglichkeiten gibt es ?

B. 04: Berechnen Sie mit der Dichtefunktion: f (x) = 1 / (b – a) in: a < x < b den Erwartungswert und die Varianz !

C. 05: Es werden im Juli zur gleichen Zeit die folgenden Lufttemperaturen in: Grad Fahrenheit gemessen: 78, 82, 81, 82, 80, 83, 77, 81, 79, 79, 83, 78, 78, 79. Geben Sie die Durchschnittstemperatur = Arithmetisches Mittel in: Grad Fahrenheit und in: Grad Celsius an (x Grad Fahrenheit entsprechen : y Grad Celsius mit : $y = \frac{5}{9} \cdot \left(x - 32 \right)$ Grad Celsius).

C. 06: Die folgenden Alltagsausdrücke und statistischen Kategorien seien (in alphabetischer Reihenfolge) gegeben: „Absolutskala; Beruf; Dichotomes Merkmal; Geschlecht; Güteklasse; Häufbares Merkmal; Nationalität; Nominalskaliertes Merkmal; Ordinalskaliertes Merkmal; Stetiges Merkmal; Stückzahl; Tagesmenge an gezapftem Treibstoff". Geben Sie für die angegebenen Alltagsausdrücken die zugehörigen statistischen Kategorien an!

D. 07: Aus 100 Kugeln, davon 30 rote Kugeln, werden zufällig: 8 Kugeln mit bzw. ohne Zurücklegen entnommen. Welche Verteilungen und welche zugehörigen Parameter sind hierbei anzuwenden ?

D. 08: Gegeben ist die Funktion der Binomialverteilung: $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. Berechnen Sie für: $n = 2$ und: $k = 0, 1, 2$ die Werte von: $P(k)$, wenn: $p = 0$; $0{,}5$ und: 1 sein soll.

E. 09: Gegeben sei eine Ebene: E1. Gesucht sei eine dazu parallele Ebene: E 2, die noch durch den Punkt: P1 geht mit den Angaben: $E1: 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \wedge P1 = P\left(2,\text{-}1,2\right)$.

E. 10: Stühle und Tische werden an den beiden Maschinen: A und: B hergestellt. A benötigt für einen Stuhl: 2 Stunden (= h), B: 1 h. A für den Tisch: 1 h ; B: 2 h . A und: B sind pro Tag 12 h betriebsbereit. Ein Stuhl kostet: 300 Euro, ein Tisch: 400 Euro. Maximieren Sie den Gewinn mittels der Simplexmethode !

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A /B /C /D /E) Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10) Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 01.07.2003

L 02 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 1, Sommersemester 2003, 30. 06. 2003, Haus 3, R. 325, 15 – 17 Uhr

Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

A. 01: Der Radius einer Kugel ändere sich mit: 3 Millimetern pro Sekunde. Wie schnell ändert sich das Volumen, wenn die Kugeloberfläche: 10 Quadratmillimeter beträgt ?

CA.: 14.13: Es ist: $A_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \wedge V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3. \rightarrow \frac{dV_K}{dr} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = A_K \rightarrow \Delta V_K = A_K \cdot \Delta r = 10 \cdot 3 = 30 \left[\frac{mm^3}{s} \right]$

A. 02: Lösen Sie: $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$ **!**

DGl.:5.12: Das ist eine DGl. 1. Ordnung mit der Lösung: $y(t) = C \cdot \exp\left[-\frac{t^4}{4} \right]$.

B. 03: Eine Firma habe 8 Fabriken, von denen 2 stillgelegt werden sollen. Wie viele derartige Möglichkeiten gibt es ?

Sch1.:5.4.7: Die Zahl der Stillegungsmöglichkeiten beträgt: $n = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ (das ist noch gerade abzählbar) **.**

B. 04: Berechnen Sie mit der Dichtefunktion: f (x) = 1 / (b – a) in: a < x < b den Erwartungswert und die Varianz !

K.:S. 1174.Ex.2: $\mathbf{E}(x) = \mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{x=a}^{x=b} x \cdot dx = \frac{a+b}{2} \wedge$ $\mathbf{VAR}(x) = \sigma^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{x=a}^{x=b} \left[x - \frac{a+b}{2} \right]^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$

C. 05: Es werden im Juli zur gleichen Zeit die folgenden Lufttemperaturen in: Grad Fahrenheit gemessen: 78, 82, 81, 82, 80, 83, 77, 81, 79, 79, 83, 78, 78, 79. Geben Sie die Durchschnittstemperatur = Arithmetisches Mittel in: Grad Fahrenheit und in: Grad Celsius an (x Grad Fahrenheit entsprechen : y Grad Celsius mit : $y = \frac{5}{9} \cdot (x - 32)$ Grad Celsius).

LE: S. 48+121: Mit 14 Meßwerten folgt:

$\bar{x} = 80{,}0$ Grad Fahrenheit . Und $y = \frac{5}{9} \cdot \left(\bar{x} - 32 \right) = \frac{5}{9} \cdot (80 - 32) = 26{,}67$ Grad Celsius

---

C. 06: Die folgenden Alltagsausdrücke und statistischen Kategorien seien (in alphabetischer Reihenfolge) gegeben: „Absolutskala; Beruf; Dichotomes Merkmal; Geschlecht; Güteklasse; Häufbares Merkmal; Nationalität; Nominalskaliertes Merkmal; Ordinalskaliertes Merkmal; Stetiges Merkmal; Stückzahl; Tagesmenge an gezapftem Treibstoff“. Geben Sie für die angegebenen Alltagsausdrücken die zugehörigen statistischen Kategorien an!

E1: S. 13 ff.: Absolutskala = Stückzahl; Dichotomes Merkmal = Geschlecht; Häufbares Merkmal = Beruf; Nominalskaliertes Merkmal = Nationalität; Ordinalskaliertes Merkmal = Güteklasse; Stetiges Merkmal = Tagesmenge an gezapften Treibstoff.

D. 07: Aus 100 Kugeln, davon 30 rote Kugeln, werden zufällig: 8 Kugeln <u>mit</u> bzw. <u>ohne</u> Zurücklegen entnommen. Welche Verteilungen und welche zugehörigen Parameter sind hierbei anzuwenden ?

Sch2.: S.117+243: <u>Mit Zurücklegen</u> ist die **Binomialverteilung** mit den Parametern: n = 8 und: $\alpha = 0{,}3$ anzuwenden; <u>ohne Zurücklegen</u> ist die **hypergeometrische Verteilung** mit den Parametern: N = 100; M = 30 und: n = 8 anzuwenden.

D. 08: Gegeben ist die Funktion der Binomialverteilung: $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; k = 0, 1, 2, ... Berechnen Sie für: n = 2 und: k = 0, 1, 2 die Werte von: P (k), wenn: p = 0; 0,5 und: 1 sein soll.

E2, Anhang, Tafel 1: Für: n = 2 gilt: $P(k)=\binom{2}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{2-k}$; $k = 0, 1, 2$. Damit folgt für:

$$k=0: P(0)=\binom{2}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{2-0}=(1-p)^2;\text{ sowie : }\begin{array}{cccc} p= & 0 & 0{,}5 & 1\\ P(0) & 0 & 0{,}25 & 0\end{array}$$

$$k=1: P(1)=\binom{2}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^{2-1}=2\cdot p\cdot(1-p);\quad\text{ sowie : }\begin{array}{cccc} p= & 0 & 0{,}5 & 1\\ P(1) & 0 & 0{,}5 & 0\end{array}$$

$$k=2: P(2)=\binom{2}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{2-2}=(p)^2;\quad\text{ sowie : }\begin{array}{cccc} p= & 0 & 0{,}5 & 1\\ P(2) & 0 & 0{,}25 & 0\end{array}$$

E. 09: Gegeben sei eine Ebene: E1. Gesucht sei eine dazu parallele Ebene: E 2, die noch durch den Punkt: P1 geht mit den Angaben: $E1: 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \wedge P1 = P(2,\text{-}1,2)$.

L - Hausaufgabe Nr. 12 vom Sommer 2003: Die Normalenvektoren der Ebenen: E1 und E2 sind wegen Parallelität gleich: Die Gleichung der Ebene: E1:

$$n_1=n_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\rightarrow 0=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\mathbf{r}-\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\mathbf{r}-7=0\leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-7=0\leftrightarrow 2x_1-x_2+x_3-7=0$$

E. 10: Stühle und Tische werden an den beiden Maschinen: A und: B hergestellt.
A benötigt für einen Stuhl: 2 Stunden (= h), B: 1 h. A für den Tisch: 1 h ; B: 2 h . A und: B sind pro Tag 12 h betriebsbereit. Ein Stuhl kostet: 300 Euro, ein Tisch: 400 Euro. Maximieren Sie den Gewinn mittels der Simplexmethode !

RÖ.: 9.3.3: Seien: x1 bzw.: x2 die pro Tag hergestellten Stühle bzw. Tische. Dann lautet das Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lccccc} \text{Zielf. :} & z(x1;x2)= & 300\cdot x1 & + & 400\cdot x2\\ \text{NB. :} & 12\geq & 2\cdot x1 & + & x2\\ \text{NB. :} & 12\geq & x1 & + & 2\cdot x2\\ \text{NN. :} & 0\leq & x1;x2 \end{array}
\quad
\begin{array}{cccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & \mathbf{b} & Q\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 12 & 12\\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 12 & 6\\ -300 & -400 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & \mathbf{b} & Q\\ \mathbf{1{,}5} & 0 & 1 & 0 & 12 & 8\\ 0{,}5 & 1 & 0 & 1 & 12 & 24\\ -100 & 0 & 0 & 200 & 2400 \end{array}$$

$$\rightarrow
\begin{array}{cccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & \mathbf{b} & Q\\ 1 & 0 & & & 4 & \\ 0 & 1 & 0 & & 4 & \\ 0 & 0 & & 200 & 2800 & \end{array}
\rightarrow$$

Das Simplex Pr ogramm ist beendet mit einem Wert für die Zielfunkti on.

Dieser Wert beträgt : z (x1; x2) = 2800 Euro für 4 Stühle und Tische täglich.

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum’s Solved Problem Series;

DGl: 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum’s Solved Problem Series;

E1: Eckstein, P. P.: Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. Auflage, 1998

E2: Eckstein, P. P.: Induktive Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 1. Auflage, 1998

K: Advanced Engineering Mathematics; E. Kreyszig; John Wiley & Sons; N. Y.; 7. Edition;

LE: Aufgabensammlung zur Einführung in die Statistik, J. Lehn et. al.**,** 3. Auflage;

RÖ: Wirtschaftsmathematik für Studium und Praxis 1; W. Rödder; Springer Verlag;

Sch 1: Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, J. Schwarze**,** 5. Auflage;

Sch 2: Grundlagen der Statistik II, J. Schwarze**,** 7. Auflage.