L 02 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 2, Sommer 2003, 16. 09. 2003, Haus 3, Großer Hörsaal, 13 – 15 Uhr.

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, Fachbereich IWI

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht **nur** über das Prüfungsamt; 9. **Der Termin für die Klausur Nr. 3 wird bekannt gegeben.**

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Berechnen Sie die Taylor – Reihe für: a = 1 von : $f(x) = e^{-x^2}$ mit etwa drei Gliedern.

A. 02: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten: a_0 von: $f(x) = x^2$ in : $[0, \pi]$!

B. 03: Berechnen Sie die Extrema von: $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Geben Sie die Art des Extremwertes an !

B. 04: Lösen Sie: $4 \cdot x \cdot dx + 9 \cdot y \cdot dy = 0 \wedge y(3) = 0$!

C. 05: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Bmatrix}$!

C. 06 Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ? Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

		Arbeitszeit	pro Stück	Nutzung der
	Maschine	P1	P2	Maschinen pro Stück
Tabelle:	1	1	2	120
	2	1	1	80
	3	1	0	60

D. 07: Gegeben seien: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6. Geben Sie an: den Median; das 0,25 – Quantil und welches Quantil ist der Wert: 4,5 ?

D. 08: Drei Maschinen erzeugen in Prozent (%) (in Klammern die Fehlern in: %) je: 1. Maschine: 20 % (3 %); 2. Maschine: 30 % (5 %) und: 3. Maschine: 50 % (8 %) der Gesamtproduktion. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt, zufällig herausgegriffen, fehlerhaft ?

E. 09: Wie groß muß: „a“ gewählt werden, damit: f (x) die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist mit:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für: } 0 < x < a \\ 0 & \text{für: sonst.} \end{cases}$$? Wie lautet die Dichtefunktion ?

E. 10: Geben Sie die Likelihood – Funktion und deren Maximum – Schätzung an von der stetigen Zufallsvariablen: Y mit der Dichtefunktion: $f(y) = \begin{cases} r \cdot b \cdot y^{r-1} \cdot e^{-b \cdot y^r} & \text{für: } b, r, y > 0 \\ 0 & \text{für: } y \leq 0 \end{cases}$.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Wildau, den 27.09.2003

L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 2, Sommer 2002, 18. 09. 2003, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 – 12 Uhr.

Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen (= Literatur):

A. 01: Berechnen Sie die Taylor – Reihe für: a = 1 von : $f(x) = e^{-x^2}$ mit etwa drei Gliedern.

Hausaufgabe Nr. 03 vom: 20. 03. 2003: Die Taylor – Reihe errechnet sich aus:

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x - a) + .. \to f(1) = e^{-1}; f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \to f'(1) = -\frac{2}{e};$$

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) \to f''(1) = \frac{2}{e}; f'''(x) = e^{-x^2} \cdot (-8x^3 + 12x) \to f'''(1) = \frac{4}{e}; \to$$

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i = \frac{1}{e} - \frac{2}{e} \cdot (x - 1) + \frac{2}{e} \cdot \frac{(x - 1)^2}{2!} + \frac{4}{e} \cdot \frac{(x - 1)^3}{3!} - \frac{20}{e} \cdot \frac{(x - 1)^4}{4!} \pm ...$$

A. 02: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten: a_0 von: $f(x) = x^2$ in : $[0, \pi]$!

Hausaufgabe Nr. 01 vom: 24. 03. 2003: Die Fourier – Reihe lautet:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} + b_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right); \text{mit} : a_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot dx \wedge f(x) = x^2;$$

$$\text{in} : [0; \pi]. \to L = \pi; \to \qquad a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = 2 \cdot \frac{\pi^2}{3}$$

B. 03: Berechnen Sie die Extrema von: f (x, y) = 4 – x^2 – y^2 . Geben Sie die Art des Extremwertes an !

Hausaufgabe Nr. 50 vom: 19. 05. 2003: Die Extrema werden über die partiellen Ableitungen berechnet:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2x_{kP} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y_{kP} = 0 \to P_{\text{kritische Punkt}} = (0; 0; 4); \wedge$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \to D_{\text{Hesse}} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \cdot \partial x} \right]^2 = +4 > 0$$

$$\to \text{Maximum oder Minimum}. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -2 \to P_{\text{kritische Punkt}} = (0; 0; 4) \text{ist ein Maximum.}$$

B. 04: Lösen Sie: $4 \cdot x \cdot dx + 9 \cdot y \cdot dy = 0 \wedge y(3) = 0$!

K.: S. 58, 27; S. A 9: Die Differentialgleichung 1. Ordnung läßt sich direkt integrieren:

$$4 \cdot \int x \cdot dx + 9 \cdot \int y \cdot dy = \int 0 dx \to 4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = C \text{ (Allg. Lös.)}; y(3) = 0 \to 4 \cdot 3^2 = 36 = 4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 \text{ (Spez.Lös.)}$$

C. 05: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Bmatrix}$!

Hausaufgabe Nr. 06 vom: 20. 03. 2003: Berechnung der 1. Eigenwerte und: 2. Eigenvektoren:

$$1.) (A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0; \to \det \begin{Bmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda \end{Bmatrix} = 0 \to (4 - \lambda) \cdot (8 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) = 0. \to \text{Eigenwerte} : \begin{matrix} \lambda_1 & = & 4 \\ \lambda_2 & = & 8 \\ \lambda_3 & = & 6 \end{matrix}$$

$$\text{Eigenvektoren}: \lambda_1 = 4: \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\wedge \lambda_2 = 8: \begin{Bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda_3 = 6 \to \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C. 06 Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ? Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

		Arbeitszeit	pro Stück	Nutzung der
	Maschine	P1	P2	Maschinen pro Stück
Tabelle:	1	1	2	120
	2	1	1	80
	3	1	0	60

Bo. S. 195, 4 + S. 213, 4: Die Simplex – Tableaus lauten mit dem Ergebnis : $z(x_1, x_2) = 1000$ Euro $\wedge\ x_1 = x_2 = 40$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
1	**2**	1	0	0	120	60	0,5	1	0,5	0	0	60	120	0	**1**	1	−1	0	**40**
1	1	0	1	0	80	80 →	**1**	0	−1	2	0	40	80 →	**1**	0	−1	2	0	**40**
1	0	0	0	1	60	∞	1	0	0	0	1	60	∞	0	0	1	−2	1	60
−10	−15	0	0	0			−2,5	0	15	0	0	900		0	0	12,5	5	0	**1.000 = z**

D. 07: Gegeben seien: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6. Geben Sie an: den Median; das 0,25 – Quantil und welches Quantil ist der Wert: 4,5 ?

Bo 1, S. 23, Beispiel: Der Median = 0,5 – Quantil = 3; n = 25; es folgt: 0,25 – Quantil und das Quantil für: 4,5:

$$n \cdot 0{,}25 = 25 \cdot 0{,}25 = 6{,}25 \notin \mathbf{N} \to \overset{\approx}{x}_{0{,}25} = x_{(7)} = 2; n \cdot \alpha = 25 \cdot \alpha = 22 \to \alpha = \frac{22}{25} = 0{,}88 \leftrightarrow 4{,}5 \text{ ist : } 0{,}88 - \text{Quantil.}$$

D. 08: Drei Maschinen erzeugen in Prozent (%) (in Klammern die Fehlern in: %) je: 1. Maschine: 20 % (3 %); 2. Maschine: 30 % (5 %) und: 3. Maschine: 50 % (8 %) der Gesamtproduktion. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt, zufällig herausgegriffen, fehlerhaft ?

Bo 1, S. 113, Beispiel: Sei: „Mi = Produkt der Maschine: i“.„F = Fehler des Produktes“. Die Wahrscheinlichkeiten lauten:

$$\mathbf{P}(M1) = 0{,}2; \mathbf{P}(M2) = 0{,}3; \mathbf{P}(M3) = 0{,}5; \wedge \mathbf{P}(F|M1) = 0{,}03; \mathbf{P}(F|M2) = 0{,}05; \mathbf{P}(F|M3) = 0{,}08. \to (\text{ Disjukte Ereignisse! })$$

$$\mathbf{P}(F) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(F|Mi) \cdot \mathbf{P}(Mi) = 0{,}03 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 + 0{,}08 \cdot 0{,}5 = 0{,}061$$

E. 09: Wie groß muß: „a“ gewählt werden, damit: f (x) die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist mit:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für : } 0 < x < a \\ 0 & \text{für : } \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{? Wie lautet die Dichtefunktion ?}$$

Hausaufgabe Nr. 63 vom: 28. 05. 2003: Die Wahrscheinlichkeit für stetige Zufallvariable liegt zwischen : „0“ und: „1“. Für: „a“ folgt und damit für: f (x) als Dichtefunktion einer Zufallsvariablen:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für : } 0 < x < a \\ 0 & \text{für : } \text{sonst.} \end{cases} \to 1 = 3 \cdot \int_{x=0}^{x=a} x^2 dx = x^3 \Big|_0^a = a^3 \to a = 1 \to f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für : } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für : } \text{sonst.} \end{cases}$$

E. 10: Geben Sie die Likelihood – Funktion und deren Maximum – Schätzung an von der stetigen Zufallsvariablen: Y mit

$$\text{der Dichtefunktion: } f(y) = \begin{cases} r \cdot b \cdot y^{r-1} \cdot e^{-b \cdot y^r} & \text{für : } b, r, y > 0 \\ 0 & \text{für : } y \le 0 \end{cases}.$$

Bo 1, S. 347 f., Beispiel: Für eine einfache Stichprobe: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt für die Likelihood – Funktion:

$$L(b) = \prod_{i=1}^{i=n} r \cdot b \cdot x_i^{r-1} \cdot e^{-b \cdot x_i^r} = (r \cdot b)^n \cdot \prod_{i=1}^{i=n} x_i^{r-1} \cdot e^{-b \cdot x_i^r} \rightarrow$$

$$\ln[L(b)] = \ln\left[r^n \cdot (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{r-1}\right] + n \cdot \ln b - b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^r .$$

$$\text{Damit}: 0 = \frac{d\ln[L(b)]}{db} = \frac{n}{b} - \sum_{i=1}^{n} x_i^r \rightarrow$$

$$\hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

Bo: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; K. Bosch, Oldenbourg, 13. Auflage

Bo 1: Statistik - Taschenbuch; K. Bosch, Oldenbourg, 3. Auflage

HA: Hausaufgaben mit Nummer und Datum des Sommersemesters 2003;

K: Advanced Engineering Mathematics; E. Kreyszig; 7. Edition; John Wiley; U.S.A.