L 02 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 3 ; Sommersemester 2003 am 22. 01. 2004, Haus 1, R. 1003 , 08 – 10 Uhr
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., Lehrauftrag

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; **9. Dies ist die letzte Prüfungsklausur.**

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Berechnen Sie die Taylor – Reihe für: a = 1 von : $f(x) = e^{-x^2}$ mit etwa drei Gliedern.
A. 02: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten: a_0 von: $f(x) = x^2$ in : $[0, \pi]$!

B. 03: : Der Radius einer Kugel ändere sich mit: 3 Millimetern pro Sekunde. Wie schnell ändert sich das Volumen, wenn die Kugeloberfläche: 10 Quadratmillimeter beträgt ?

B. 04: Lösen Sie: $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$ **!**

C. 05: Gegeben sei eine Ebene: E1. Gesucht sei eine dazu parallele Ebene: E 2, die noch durch den Punkt: P1 geht mit den Angaben: $E1: 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \wedge P1 = P\left(2,-1,2\right)$.

C. 06 Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ?
Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

Tabelle:

Maschine	Arbeitszeit pro Stück P1	Arbeitszeit pro Stück P2	Nutzung der Maschinen pro Stück
1	1	2	120
2	1	1	80
3	1	0	60

D. 07: Gegeben seien: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6. Geben Sie an: den Median; das 0,25 – Quantil und welches Quantil ist der Wert: 4,5 ?

D. 08: Drei Maschinen erzeugen in Prozent (%) (in Klammern die Fehlern in: %) je: 1. Maschine: 20 % (3 %); 2. Maschine: 30 % (5 %) und: 3. Maschine: 50 % (8 %) der Gesamtproduktion. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt, zufällig herausgegriffen, fehlerhaft ?

E. 09: Wie groß muß: „a“ gewählt werden, damit: f (x) die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist mit:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für: } 0 < x < a \\ 0 & \text{für: } \text{sonst.} \end{cases}$$? Wie lautet die Dichtefunktion ?

E. 10: Geben Sie die Likelihood – Funktion und deren Maximum – Schätzung an von der stetigen Zufallsvariablen: Y mit der Dichtefunktion: $f(y) = \begin{cases} r \cdot b \cdot y^{r-1} \cdot e^{-b \cdot y^r} & \text{für: } b, r, y > 0 \\ 0 & \text{für: } y \le 0 \end{cases}$.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A /B /C /D / Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10) Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 30.01.2004

L 01 - Mathematik / Statistik – Klausur Nr. 3 zum Sommersemester 2002, 29. 01. 2003, Haus 1, R. 1117, 09 – 11 Uhr
Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

A. 01: Berechnen Sie die Taylor – Reihe für: a = 1 von : $f(x) = e^{-x^2}$ mit etwa drei Gliedern.

Hausaufgabe Nr. 03 vom: 20. 03. 2003: Die Taylor – Reihe errechnet sich aus:

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + .. \to f(1) = e^{-1}; f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \to f'(1) = -\frac{2}{e};$$

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot \left(4x^2 - 2\right) \to f''(1) = \frac{2}{e}; f'''(x) = e^{-x^2} \cdot \left(-8x^3 + 12x\right) \to f'''(1) = \frac{4}{e}; \to$$

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i = \frac{1}{e} - \frac{2}{e} \cdot (x-1) + \frac{2}{e} \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{4}{e} \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{20}{e} \cdot \frac{(x-1)^4}{4!} \pm ...$$

A. 02: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten: a_0 von: $f(x) = x^2$ in : $[0, \pi]$!

Hausaufgabe Nr. 01 vom: 24. 03. 2003: Die Fourier – Reihe lautet:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} + b_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right); \text{mit} : a_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot dx \wedge f(x) = x^2;$$

$$\text{in} : [0; \pi]. \to L = \pi; \to \qquad a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = 2 \cdot \frac{\pi^2}{3}$$

B. 03: : Der Radius einer Kugel ändere sich mit: 3 Millimetern pro Sekunde. Wie schnell ändert sich das Volumen, wenn die Kugeloberfläche: 10 Quadratmillimeter beträgt ?

CA.: 14.13: Es ist: $A_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \wedge V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3. \to \frac{dV_K}{dr} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = A_K \to \Delta V_K = A_K \cdot \Delta r = 10 \cdot 3 = 30 \left[\frac{mm^3}{s}\right]$

B. 04: Lösen Sie: $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$ **!**

DGl.:5.12: Das ist eine DGl. 1. Ordnung mit der Lösung: $y(t) = C \cdot \exp\left[-\frac{t^4}{4}\right]$.

C. 05: Gegeben sei eine Ebene: E1. Gesucht sei eine dazu parallele Ebene: E 2, die noch durch den Punkt: P1 geht mit den Angaben: $E1 : 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \wedge P1 = P(2,-1,2)$**.**

L - Hausaufgabe Nr. 12 vom Sommer 2003: Die Normalenvektoren der Ebenen: E1 und E2 sind wegen Parallelität gleich: Die Gleichung der Ebene: E1:

$$n_1 = n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} - 7 = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 7 = 0 \leftrightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 - 7 = 0$$

C. 06 Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ? Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

Tabelle:

Maschine	Arbeitszeit pro Stück P1	Arbeitszeit pro Stück P2	Nutzung der Maschinen pro Stück
1	1	2	120
2	1	1	80
3	1	0	60

Bo. S. 195, 4 + S. 213, 4: Die Simplex – Tableaus lauten mit dem Ergebnis : $z(x_1, x_2) = 1000$ Euro $\wedge\ x_1 = x_2 = 40$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Q		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Q		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
1	**2**	1	0	0	120	60		0,5	1	0,5	0	0	60	120		0	**1**	1	−1	0	**40**
1	1	0	1	0	80	80	→	**1**	0	−1	2	0	40	80	→	**1**	0	−1	2	0	**40**
1	0	0	0	1	60	∞		1	0	0	0	1	60	∞		0	0	1	−2	1	60
−10	−15	0	0	0				−2,5	0	15	0	0	900			0	0	12,5	5	0	**1.000 = z**

D. 07: Gegeben seien: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6. Geben Sie an: den Median; das 0,25 – Quantil und welches Quantil ist der Wert: 4,5 ?

Bo 1, S. 23, Beispiel: Der Median = 0,5 – Quantil = 3; n = 25; es folgt: 0,25 – Quantil und das Quantil für: 4,5:

$$n \cdot 0{,}25 = 25 \cdot 0{,}25 = 6{,}25 \notin \mathbf{N} \rightarrow \tilde{\tilde{x}}_{0,25} = x_{(7)} = 2;\ n \cdot \alpha = 25 \cdot \alpha = 22 \rightarrow \alpha = \frac{22}{25} = 0{,}88 \leftrightarrow 4{,}5 \text{ ist : } 0{,}88 - \text{Quantil.}$$

D. 08: Drei Maschinen erzeugen in Prozent (%) (in Klammern die Fehlern in: %) je: 1. Maschine: 20 % (3 %); 2. Maschine: 30 % (5 %) und: 3. Maschine: 50 % (8 %) der Gesamtproduktion. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt, zufällig herausgegriffen, fehlerhaft ?

Bo 1, S. 113, Beispiel: Sei: „Mi = Produkt der Maschine: i“.„F = Fehler des Produktes“. Die Wahrscheinlichkeiten lauten:

$$\mathbf{P}(M1) = 0{,}2; \mathbf{P}(M2) = 0{,}3; \mathbf{P}(M3) = 0{,}5; \wedge \mathbf{P}(F|M1) = 0{,}03; \mathbf{P}(F|M2) = 0{,}05; \mathbf{P}(F|M3) = 0{,}08. \rightarrow \text{(Disjukte Ereignisse!)}$$

$$\mathbf{P}(F) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(F|Mi) \cdot \mathbf{P}(Mi) = 0{,}03 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 + 0{,}08 \cdot 0{,}5 = 0{,}061$$

E. 09: Wie groß muß: „a“ gewählt werden, damit: f (x) die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist mit:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für : } 0 < x < a \\ 0 & \text{für : sonst.} \end{cases} \quad \text{? Wie lautet die Dichtefunktion ?}$$

Hausaufgabe Nr. 63 vom: 28. 05. 2003: Die Wahrscheinlichkeit für stetige Zufallvariable liegt zwischen : „0“ und: „1“. Für: „a“ folgt und damit für: f (x) als Dichtefunktion einer Zufallsvariablen:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für : } 0 < x < a \\ 0 & \text{für : sonst.} \end{cases} \rightarrow 1 = 3 \cdot \int_{x=0}^{x=a} x^2 dx = x^3 \Big|_0^a = a^3 \rightarrow a = 1 \rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{für : } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für : sonst.} \end{cases}$$

E. 10: Geben Sie die Likelihood – Funktion und deren Maximum – Schätzung an von der stetigen Zufallsvariablen: Y mit der Dichtefunktion: $f(y) = \begin{cases} r \cdot b \cdot y^{r-1} \cdot e^{-b \cdot y^r} & \text{für : } b, r, y > 0 \\ 0 & \text{für : } y \le 0 \end{cases}$.

Bo 1, S. 347 f., Beispiel: Für eine einfache Stichprobe: $x = (x_1, ..., x_n)$ gilt für die Likelihood – Funktion:

$$L(b) = \prod_{i=1}^{i=n} r \cdot b \cdot x_i^{r-1} \cdot e^{-b \cdot x_i^r} = (r \cdot b)^n \cdot \prod_{i=1}^{i=n} x_i^{r-1} \cdot e^{-b \cdot x_i^r} \rightarrow$$

$$\ln[L(b)] = \ln\left[r^n \cdot (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{r-1}\right] + n \cdot \ln b - b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^r.$$

$$\text{Damit : } 0 = \frac{d\ln[L(b)]}{db} = \frac{n}{b} - \sum_{i=1}^{n} x_i^r \rightarrow$$

$$\hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

Bo: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; K. Bosch, Oldenbourg, 13. Auflage;

Bo 1: Statistik - Taschenbuch; K. Bosch, Oldenbourg, 3. Auflage;

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

DGl: 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

HA: Hausaufgaben mit Nummer und Datum des Sommersemesters 2003.