Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

P + V - Mathematik – Klausur 1 im Wintersemester 2001/2 am 14. 01. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 9.30 - 11 Uhr

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Wiederholungstermine werden ausgehängt.

Geben Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer an:

Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A.1: Geben Sie die Wertebereiche an für: x aus: $3x^2 + x > 0$!

A.2: Zeigen Sie: $\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{\tan^4 x + 1}{\tan^2 x}$! (Mit einigen Zwischenschritten !)

B.3: Berechnen Sie : x und: y aus der Gleichung: $(3 + 2 i) (x + y i) = 1$!

B.4: Lösen Sie die Gleichung: $x^2 - i = 0$!

C.5: Lösen Sie das gegebene lineare Gleichungssystem über die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ + x_2 - x_3 &= 0 \\ + x_3 &= 1 \end{aligned}$$!

C.6: Gegeben sei eine Ebene durch die drei Punkte: P1 (a, 0, 0); P2 (0, b, 0) und: P3 (0, 0, c). Geben Sie eine der möglichen Koordinatengleichungen dieser Ebene an !

D.7: Leiten Sie die Funktion: f (x) = ln (ln x) nach: x ab !

D.8: Geben Sie die erste Ableitung an von: $x * y + y^2 = 1$!

E.9: Geben Sie die Stammfunktion an von: $T(x) = \sin x \ \cos^2 x$!

E.10: Lösen Sie: $\int \frac{x \cdot dx}{(x+2)\cdot(x+3)}$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/B/C/D/E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 29.09.2002

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Aufgaben mit Lösungen und Herkunft der Lösungen:

A.1: Geben Sie die Wertebereiche an für: x aus: $3x^2 + x > 0$!

CAT: 2.201: $3x^2+x = x(3x+1)>0$; damit folgt: 1. $x>0$ und: $3x+1>0$; oder 2: $x<0$ und: $3x+1<0$! Aus 1.: $x>0$ und: $x>-1/3$; oder aus 2: $x<0$ und: $x<-1/3$. Also: $x>0$ und: $x<-1/3$. In Mengenschreibweise dargestellt: $(0,\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

A.2: Zeigen Sie: $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{\tan^4 x+1}{\tan^2 x}$! (Mit einigen Zwischenschritten !)

CAT: 8.11: $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\tan^2 x+\dfrac{1}{\tan^2 x}=\dfrac{\tan^4 x+1}{\tan^2 x}$; q.e.d.

B.3: Berechnen Sie : x und: y aus der Gleichung: $(3 + 2 i) (x + y i) = 1$!

CAT: 1.201: $(3+2i)(x + y i)=(3x-2y)+(2x+3y)i=1+0i=1$; da $\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2$ und $\mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$, sein muß, folgt: $(3x-2y) =1$ sowie: $(2x+3y)=0$. Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt : $x=3/13$ und : $y=-2/13$.

B.4: Lösen Sie die Gleichung: $x^2 - i = 0$!

CAT: 11.70: Aus: $x^2-i=0$ folgt mittels: $x^2=i$. und *de Moivre*`s Satz: $z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\alpha+k2\pi}{n}+\sin\dfrac{\alpha+k2\pi}{n}\right)$ mit:

$$r=1\ und:\alpha=90^0=\frac{\pi}{2}:\Rightarrow z_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2};\quad\wedge\ z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

C.5: Lösen Sie das gegebene lineare Gleichungssystem über die inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1}$: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ + x_2 - x_3 &= 0 \\ + x_3 &= 1 \end{aligned}$!

V.: Es gilt für die Berechnung des Lösungsvektors: **x** über die inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{b}$, wobei:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix};sowie:b=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$ Mit dem Gauß – Jordan – Algorithmus errechnet sich: $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}|\mathbf{E}=\left.\begin{matrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}=\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}$$; damit ergibt

sich der Lösungsvektor zu: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{b}$: $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

C.6: Gegeben sei eine Ebene durch die drei Punkte: P1 (a, 0, 0); P2 (0, b, 0) und: P3 (0, 0, c). Geben Sie eine der möglichen Koordinatengleichungen dieser Ebene an !

K. & H: S. 4.60: Die Differenz von je zwei Vektoren der drei Punkte spannen die Ebene auf. Damit folgt:

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\cdot\mathbf{b}+\mu\cdot\mathbf{c}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\b\\-c\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\-c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}x&=a+\mu a\\y&=\lambda\cdot b\\z&=-c\cdot(\lambda\cdot+\mu)\end{aligned}$$ .Das Einsetzen der ersten

Gleichungen in die dritte Gleichung ergibt:

$$-\frac{z}{c}=\left(\frac{y}{b}+\frac{x}{a}-1\right);\ umgeformt:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;\ oder\ auch:\ bc\cdot x+ac\cdot y+ab\cdot z=abc$$.(Hessesche Normalform = Achsenabschnittsform bzw.: Standardform: A x + B y + C z = D).

D.7: Leiten Sie die Funktion: f (x) = ln (ln x) nach: x ab !

CA: 23.6: Es muß gelten: $\frac{d}{dx}\{f(x)=\ln(\ln x)\}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot\ln x}$ (nach der Kettenregel).

D.8: Geben Sie die erste Ableitung an von: x * y + y^2 = 1 !

CA: 12.13: Die Lösung ergibt sich durch implizite Differentiation: $\frac{d}{dx}\{xy+y^2=1\}\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\{xy+y^2=1\}\Rightarrow y+xy'+2yy'=0\Rightarrow y'\cdot(x+2y)=-y\Rightarrow y'=-\frac{y}{x+2y}.$$

E.9: Geben Sie die Stammfunktion an von: T (x) = sin x $\cos^2$ x !

CA: 29.3: Die Integrationsaufgabe ist mittels Substitution lösbar: Sei: cos x = u(x); damit wird: du(x) = - sin x d x, oder auch: -d u = + sin x d x. Damit folgt für das Integral:

$$\int\sin x\cdot\cos^2 x\cdot dx=\int(-du)\cdot u^2=-\int u^2\cdot du=-\frac{1}{3}\cdot u^3+C=-\frac{1}{3}\cdot\cos^3 x+C$$

E.10: Lösen Sie: $\int\frac{x\cdot dx}{(x+2)\cdot(x+3)}$!

CA: 30.2: Dieses Integral ist mittels Partialbruchzerlegung zu lösen:

$\int\frac{x\cdot dx}{(x+2)\cdot(x+3)}$. Die Partialbruchzerlegung ergibt: $\frac{x}{(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}$; damit:

$$\frac{x}{(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)};\Rightarrow A=-2;\wedge B=+3;\quad\Rightarrow\int\frac{x\cdot dx}{(x+2)\cdot(x+3)}=$$

$$-\int\frac{2dx}{(x+2)}+\int\frac{3dx}{(x+3)}\Rightarrow\int\frac{x\cdot dx}{(x+2)\cdot(x+3)}=-2\ln(x+2)+3\ln(x+3)+C=\ln\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}+C$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

CAT: 2500 Solved Problems in College Algebra and Trigonometry; P. Schmidt; Schaum's Solved Problem Series;

H: Hausaufgaben im WS 2001 / 2002

K: Köhler, et. al. : Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in vektorieller Darstellung ;

V: Vorlesungsbeispiel am 15. 11. 2001