P + V, Mathematik 1 – Klausur Nr. 2, Wintersemester 2001/02.

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63
P + V – Klausur Nr. 2, Wintersemester 2001/02, 06. 03. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 - 12 Uhr

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Wiederholungstermine werden ausgehängt.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Geben Sie mit einigen Zwischenschritten: $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=f(\tan x) \quad an\,!$

A. 02: Berechnen Sie für: x die Wertebereiche aus der Ungleichung: $3x^2 + x > 0$!

B. 03: Berechnen Sie die Werte für: x und für: y aus der Gleichung: $(3 + 2i)(x + yi) = 1$!

B. 04: Geben Sie diejenigen komplexen Zahlen an, die die Gleichung: $x^2 - i = 0$ lösen!

C. 05: Lösen Sie das Gleichungssystem über die anzugebene inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{array}{llll} x_1 & + x_2 & + x_3 & = 3 \\ & + x_2 & - x_3 & = 0 \\ & & + x_3 & = 1 \end{array}$$

!

C. 06: Gegeben sei eine Ebene durch die drei Punkte: A (1, -1, 4); B (2, 0, 1) und: C (0, 2, 3). Geben Sie den orthogonalen Vektor zu dieser Ebene, gegeben durch: A, B, und: C an !

D. 07: Differenzieren Sie implizit nach der unabhängigen Variablen: $x * y(x) + y^2(x) = 1$!

D. 08: Geben Sie die ersten 4 Terme an von: $f(x) = e^x * \cos x$, indem Sie deren MacLaurien – Reihen multiplizieren!

E. 09: Integrieren Sie : $S(x) = \sin x \ \cos^2 x$!

E. 10: Lösen Sie das folgende Integral: $F(x) = \int \frac{x \cdot dx}{(x+2)\cdot(x+3)}$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/B/C/D/E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 14.08.2002

1. Wiederholungsklausur, P + V, Mathematik 1, Wintersemester 2001/02.

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63
P + V - Wiederholungsklausur, Wintersemester 2001/02, 06. 03. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 - 12 Uhr

Aufgaben mit Lösungen und Herkunft der Lösungen:

A. 01: Geben Sie mit einigen Zwischenschritten: $\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=f(\tan x) \quad an!$

CAT: 8.11: Ähnlich der Klausur 1 :

$$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{\tan^4 x+1}{\tan^2 x}$$; q.e.d.

A. 02: Berechnen Sie für: x die Wertebereiche aus der Ungleichung: $3x^2 + x > 0$!

CAT: 2.201: $3x^2 +x = x (3x+1) > 0$; damit folgt: **1.:** x > 0 und: 3x+1 > 0; oder **2.:** x < 0 und: 3x+1 < 0 ! Aus **1.:** x > 0 und: x>-1/3; oder aus **2.:** x < 0 und: x < -1/3. Also: x > 0 und: x < -1/3. In Mengenschreibweise: $(0,\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

B. 03: Berechnen Sie die Werte für: x und für: y aus der Gleichung: (3 + 2 i) (x + y i) = 1 !

CAT: 1.201: (3+2i)(x + y i)=(3x-2y)+(2x+3y)i=1+0i=1; da $Rez_1=Rez_2$ und $Imz_1=Imz_2$, sein muß, folgt: (3x-2y) =1 sowie: (2x+3y)=0. Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt : x=3/13 und : y=-2/13.

B. 04: Geben Sie diejenigen komplexen Zahlen an, die die Gleichung: $x^2 – i = 0$ lösen!

CAT: 11.70: Aus: $x^2–i=0$ folgt mittels: $x^2=i$. und dem *de Moivre*`s Satz: $z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+k2\pi}{n}+\sin\frac{\alpha+k2\pi}{n}\right)$

mit: $r=1\, und : \alpha=90^0=\frac{\pi}{2}: \Rightarrow z_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \wedge \; z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

C. 05: Lösen Sie das Gleichungssystem über die anzugebene inverse Matrix: $\mathbf{A^{-1}}$:
$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ & +x_2 & -x_3 & =0 \\ & & +x_3 & =1 \end{array} !$$

V.: Es gilt für die Berechnung des Lösungsvektors: **x** über die inverse Matrix: $\mathbf{A^{-1}}$: $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} * \mathbf{b}$, wobei:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}; sowie : b=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$. Mit dem Gauß – Jordan – Algorithmus errechnet sich: $\mathbf{A^{-1}}$:

$$\mathbf{A}|\mathbf{E}=\left.\begin{array}{rrr}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right|\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\Rightarrow\left.\begin{array}{rrr}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right|\begin{array}{rrr}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\Rightarrow\left.\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right|\begin{array}{rrr}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{array}=\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}$$; damit ergibt

sich der Lösungsvektor zu: $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} * \mathbf{b}$: $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

C. 06: Gegeben sei eine Ebene durch die drei Punkte: A (1, -1, 4); B (2, 0, 1) und: C (0, 2, 3). Geben Sie den orthogonalen Vektor zu dieser Ebene, gegeben durch: A, B, und: C an !

CA: 40.42: 2 beliebige Vektoren in der gesuchten Ebene lauten: **a** = (1,1-3), sowie: **b** = (-1,3,-1).
Jeder Normalenvektor (= orthogonaler Vektor) ist das Vektorprodukt beliebiger linear unabhängiger Vektoren der Ebene,

also muß gelten: $\mathbf{n} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} mit : \lambda \in \mathbf{R}$.
D. 07: Differenzieren Sie implizit nach der unabhängigen Variablen: x * y (x) + y^2(x) = 1 !   **CA:** 12.13: Die Lösung ergibt sich durch implizite Differentiation: $\frac{d}{dx}\{xy + y^2 = 1\} \Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\{xy + y^2 = 1\} \Rightarrow y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' \cdot (x + 2y) = -y \Rightarrow y' = -\frac{y}{x + 2y}$.
D. 08: Geben Sie die ersten 4 Terme an von: f (x) = $e^x * \cos x$, indem Sie deren MacLaurien – Reihen multiplizieren!   **CA:** 38.79: Es gilt: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; sowie : \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;   damit folgt: $e^x * \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ...\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\right) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + ...$
E. 09: Integrieren Sie : S (x) = sin x $\cos^2$ x !   **CA:** 29.3: Die Integrationsaufgabe ist z. B. mittels Substitution lösbar: Sei: cos x = u(x); damit wird: d u(x) = - sin x d x, oder auch: -d u = + sin x d x. Damit folgt für das Integral: $\int \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int (-du) \cdot u^2 = -\int u^2 \cdot du = -\frac{1}{3} \cdot u^3 + C = -\frac{1}{3} \cdot \cos^3 x + C$
E. 10: Lösen Sie das folgende Integral: $F(x) = \int \frac{x \cdot dx}{(x+2) \cdot (x+3)}$!   **CA:** 30.2: Lösung mittels Partialbruchzerlegung. Diese ergibt: $\frac{x}{(x+2) \cdot (x+3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}$; damit über die Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung und einem nachfolgendem Koeffizientenvergleich: $\frac{x}{(x+2) \cdot (x+3)} = \frac{A \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x+3)} + \frac{B \cdot (x+2)}{(x+3) \cdot (x+2)}; \Rightarrow A = -2; \wedge B = +3; \quad \Rightarrow \int \frac{x \cdot dx}{(x+2) \cdot (x+3)} =$ $-\int \frac{2dx}{(x+2)} + \int \frac{3dx}{(x+3)} \Rightarrow \int \frac{x \cdot dx}{(x+2) \cdot (x+3)} = -2\ln(x+2) + 3\ln(x+3) + C = \ln \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} + C = F(x)$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

CAT: 2500 Solved Problems in College Algebra and Trigonometry; P. Schmidt; Schaum's Solved Problem Series;

K: Köhler, et. al. : Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in vektorieller Darstellung ;

V: Vorlesungsbeispiel am 15. 11. 2001