P + V - Mathematik 1 – Klausur Nr. 3 zum Wintersemester 2001 / 02.

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63
P + V – Mathematik 1, Klausur Nr. 3, Wintersemester 2001 / 02 am 15. 06. 2002, Haus 1, 1003, 10 - 12 Uhr

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Dies ist die letzte Prüfungsmöglichkeit.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Lösen Sie die Ungleichung: $x^2 > x^3$!

A. 02: Lösen Sie auf: $\dfrac{\sin^4\beta - \cos^4\beta}{\sin^2\beta - \cos^2\beta} = ?$

B. 03: Geben Sie alle Lösungen an von: $0 = x^3 + 8$!

B. 04: Berechnen Sie: x aus: (1 – i) x + 3 i = 2 i !

C. 05: Lösen Sie mittels Determinanten:
$$\begin{aligned} 2x &= 5 + y \\ 3 + 2y + 3x &= 0 \end{aligned}$$
!

C. 06: Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren an von: $A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$!

D. 07: Differenzieren Sie einmal: $y(x) = y = x^{\ln x}$ **!**

D. 08: Geben Sie alle Ableitungen an von: $y = 2 \cdot x^2 + x - 1 + \frac{1}{x}$!

E. 09: Berechnen Sie das folgende Integral: $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$!

E. 10: Geben Sie die Stammfunktion an von: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 14.08.2002

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

P + V – Mathematik 1, Klausur Nr. 3, Wintersemester 2001/02, 15. 06. 2002, Haus 1, 1003, 10 - 12 Uhr

Aufgaben mit Lösungen und Herkunft der Lösungen:

A. 01: Lösen Sie die Ungleichung: $x^2 > x^3$!

CA: 1.23: $x^2 > x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-1) < 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x < 1 : \textit{Lösung}.$

A. 02: Lösen Sie auf: $\dfrac{\sin^4 \beta - \cos^4 \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta} = ?$

CAT: 8.49: $\dfrac{\sin^4 \beta - \cos^4 \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta} = \dfrac{\left(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta\right) \cdot \left(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta\right)}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta} = 1$

B. 03: Geben Sie alle Lösungen an von: $0 = x^3 + 8$!

CAT: 11.72: Es gibt zwei Lösungsmöglichkeiten: 1. Polynomdivision; 2. de Moivre's Satz:

$$1.: 0 = x^3 + 8 \Rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow \left(x^3 + 8\right) : (x+2) = x^2 - 2x + 4; x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = 1 \pm i \cdot \sqrt{3}$$

$$2.: x^3 = -8 \Rightarrow r = 2; \alpha = \pi; \Rightarrow w_1 = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i \cdot \sqrt{3};$$

$$w_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi + \pi}{3} + i \sin\frac{2\pi + \pi}{3}\right) = -2; w_3 = 2 \cdot \left(\cos\frac{4\pi + \pi}{3} + i \sin\frac{4\pi + \pi}{3}\right) = 1 - i \cdot \sqrt{3}; q.e.d.$$

C. 04: Berechnen Sie: x aus: (1 – i) x + 3 i = 2 i !

CAT: 11.92: x muß im Allgemeinen eine komplexe Zahl sein: x = a + i b: Der Vergleich von Real – und Imaginärteil

$$\Rightarrow (1-i) \cdot (a + ib) = -i; \Rightarrow (a+b) + i \cdot (b-a) = 0 + i(-1) \Rightarrow$$

ergibt die gesuchten Werte für: a und: b !

$$a + b = 0 \wedge b - a = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge a = +\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot (1-i); q.e.d.$$

D. 05: Lösen Sie mittels Determinanten: $\begin{array}{llll} 2x & = 5 & + y & \\ 3 + & 2y & + 3x & = 0 \end{array}$!

LA: 5.20: In Standardform geschrieben ergibt sich nacheinander:

$$\begin{array}{llll} 2x & = 5 & + y & \\ 3 + & 2y & + 3x & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} 2x & - y & = 5 \\ 3x & + 2y & = -3 \end{array} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7; \textit{ und damit}:$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7; D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21; \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

E. 06: Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren an von: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$!

LA: 16.28: $0 = \det \left| t \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix} \right| \Leftrightarrow 0 = t^2 - 3t - 4 \Rightarrow t_1 = +4; t_2 = -1.$

Damit sind die beiden Eigenwerte errechnet; es folgen die beiden Eigenvektoren aus:

$$t_1 = +4 : \begin{Bmatrix} 4-1 & -2 \\ -3 & 4-2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^1$$

q.e.d.

$$t_2 = -1 : \begin{Bmatrix} -1-1 & -2 \\ -3 & -1-2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^2$$

D. 07: Differenzieren Sie einmal: $y(x) = y = x^{\ln x}$ **!**

CA: 24.37: Aus:

$$y(x) = y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2 \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y'(x) = y' = y \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot x^{\ln x} = 2 \cdot \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$$

D. 08: Geben Sie alle Ableitungen an von: $y = 2 \cdot x^2 + x - 1 + \frac{1}{x}$!

CA: 12.36:

$$y = 2 \cdot x^2 + x - 1 + x^{-1}; \Rightarrow y' = 4 \cdot x + 1 - x^{-2}; \Rightarrow y'' = 4 + 2 \cdot x^{-3}; \Rightarrow y''' = -2 \cdot 3 \cdot x^{-4}; \ldots \Rightarrow$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}. \quad q.e.d.$$

E. 09: Berechnen Sie das folgende Integral: $\int \frac{\cos x \; dx}{1 + \sin^2 x}$!

CA: 27.57: Vereinfacht

$$\int \frac{\cos x \; dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{du}{1 + u^2}; (mit : u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx); \int \frac{du}{1 + u^2} = \int dz = z + K \Rightarrow \arctan u + K$$

$$(mit : z = \tan u \Rightarrow dz = (1 + \tan^2 z) dx); resubstituieren : \int \frac{\cos x \; dx}{1 + \sin^2 x} = \arctan(\sin x) + K$$

E. 10: Geben Sie die Stammfunktion an von: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$!

CA: 28.1: Die Stammfunktion ergibt sich durch zweimalige partielle Integration oder Ansatz: $F(x) = \int f(x) dx + C$

$$F(x) = \int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot x \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-x} \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2) + C = e^{-x} \cdot (-x^2 - 2 \cdot x - 2) + C$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum’s Solved Problem Series;

CAT: 2500 Solved Problems in College Algebra and Trigonometry; P. Schmidt; Schaum’s Solved Problem Series;

LA: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum’s Solved Problem Series.