P + V - Mathematik – Klausur Nr. 1, Wintersemester 2002 / 03, 20. 01. 2002, Haus 1, R. 1003, 10 - 12 Uhr

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch die mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punkteabzug; 6. Die Klausur ist bestanden, wenn aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte; 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich nur über das Prüfungsamt; 9. Die weiteren Klausurtermine werden durch Aushang bekannt gegeben.

Geben Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer an:

Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Gilt (Wahrheitstafel !) : $\left[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\right] \rightarrow (A \leftrightarrow B)$? Zeigen Sie es !

A. 02: Beweisen Sie mittels Induktion: $n! \geq 2^n$ für : $n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 4$!

B. 03: Gegeben seien die Mengen: $M = \{0,1\} \wedge N = \{1,0\}$. Geben Sie: M X N und: N X M an und vergleichen Sie !

B. 04: Lösen Sie die folgende Gleichung: $|x-2| + |x-5| = 9$!

C. 05: Lösen Sie nach x auf: $(1-i) \cdot x + 3 \cdot i = 2 \cdot i$ **!**

C. 06: Geben Sie alle Lösungen an von: $x^3 + 1 = 0$!

D. 07: Geben Sie einen orthonormierten Vektor an zu: $\mathbf{u}^T = (1,2,3) \wedge \mathbf{v}^T = (3,-1,4)$!

D. 08: Lösen Sie mit Determinanten das Gleichungssystem: $\begin{matrix} ax - 2by & = c \\ 3ax - 5by & = 2c \end{matrix} \wedge a; b \neq 0$!

E. 09: Geben Sie die Taylor – Reihe an von: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3 \;\wedge\; a = +1$!

E. 10: Lösen Sie nach: „b“ auf : $\int_1^b x^{n-1} dx = \frac{2}{n} \wedge n \neq 0$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E) Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 /02 /03 /04 /05 /06 /07 /08 /09 /10) Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 23.03.2003

P + V - Mathematik – Klausur Nr. 1, Wintersemester 2001 / 02, 20. 01. 2002, Haus 1, R. 1003, 10 - 12 Uhr

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB WI / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Aufgaben mit Lösungen und Herkunft der Lösungen:

A. 01: Gilt (Wahrheitstafel !) : $[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)] \rightarrow (A \leftrightarrow B)$? Zeigen Sie es !

Sch.:3.2.2;S.18+S.105: Das Aufstellen der Wahrheitstafel zeigt folgendes Ergebnis:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$(A \leftrightarrow B)$	
W	W	W	W	W	W	
W	F	F	W	F	F	ist logisch korrekt.
F	W	W	F	F	F	
F	F	W	W	W	W	

A. 02: Beweisen Sie mittels Induktion: $n! \geq 2^n$ für : $n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 4$!

DM.: 1.202: Es gilt: $n! \geq 2^n$ für : $n \in N \wedge n \geq 4 \rightarrow A(4) := 4! = 24 \geq 2^4 = 16$ ist wahr; $\wedge A(n) := n! \geq 2^n$ ist wahr.
$\rightarrow A(n+1) := n! \cdot (n+1) \geq 2^n \cdot (n+1) \geq 2^n \cdot (1+1) = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$; q. e. d.

B. 03: Gegeben seien die Mengen: $M = \{0,1\} \wedge N = \{1,0\}$. Geben Sie: M X N und: N X M an und vergleichen Sie !

DM.:2.10: $M \times N = \{(0,1);(0,0);(1,1);(1,0)\}$; $N \times M = \{(1,0);(1,1);(0,0);(0,1)\} \rightarrow M \times N = N \times M$

B. 04: Lösen Sie die folgende Gleichung: $|x-2| + |x-5| = 9$!

CA.:2.33: Es sind drei Fälle zu untersuchen: **Fall 1:** $x \geq 5 \rightarrow x - 2 + x - 5 = 9 \rightarrow x = 8$;
Fall 2: $2 \leq x \leq 5 \rightarrow x - 2 + 5 - x = 9 \rightarrow 3 = 9 \leftrightarrow$ Widerspruch **;**
Fall 3: $x < 2 \rightarrow 2 - x + 5 - x = 9 \rightarrow x = -1$ **.**
Die Lösung lautet also: x = -1 und: x = +8.

C. 05: Lösen Sie nach x auf: $(1-i) \cdot x + 3 \cdot i = 2 \cdot i$ **!**

CAT.: 11.92: Es gibt mehrere Wege: Sei: x = a + i b; es folgt damit:

1. $(1-i) \cdot (a+ib) + 3 \cdot i = 2 \cdot i \rightarrow (a+b) + i \cdot (1-a+b) = 0 \leftrightarrow a+b = 0 \wedge 1-a+b = 0 \rightarrow a = -b \wedge a = -b = \frac{1}{2}$;

$\rightarrow z = \frac{1}{2}(1-i)$; 2. $(1-i) \cdot x + 3 \cdot i = 2 \cdot i \rightarrow x = \frac{-i}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{1}{2}(1-i)$

C. 06: Geben Sie alle Lösungen an von: $x^3 + 1 = 0$!

CAT.: 11.69: Es gibt mehrere Wege: a) Elementar: $x_1 = -1; \rightarrow (x^3+1):(x+1) = x^2 - x + 1; x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

b) De Moivre: $x^3 + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-1} \leftrightarrow k = 3; r = 1 \wedge \alpha = 180^0 = \pi \wedge n = 1,2,3;$ damit folgt für n = 1, 2, 3 :

$(n=1): z_1 = 1^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\pi\right] = -1; (n=2): z_2 = \left[\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 07: Geben Sie einen orthonormierten Vektor an zu: $\mathbf{u}^T = (1,2,3) \wedge \mathbf{v}^T = (3,-1,4)$!   **LA.:14.104:** Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten: Das Vektorprodukt ergibt: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (11,5,-7)$.   Dividiert durch die Länge von: **w** ergibt sich: $\mathbf{w}_e = \frac{1}{\sqrt{195}} \cdot (11,5,-7)$.
D. 08: Lösen Sie mit Determinanten das Gleichungssystem: $\begin{matrix} ax - 2by & = c \\ 3ax - 5by & = 2c \end{matrix} \wedge a; b \neq 0$!   **LA.:5.22:** Es ist: $D = \begin{vmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{vmatrix} = ab \wedge D_x = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -bc \wedge D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = -ac \to x = \frac{D_x}{D} = -\frac{c}{a} \wedge y = \frac{D_y}{D} = -\frac{c}{b}$.
E. 09: Geben Sie die Taylor – Reihe an von: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3 \wedge a = +1$!   **CA.: 39.37:** Neue Art: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3 = 2[(x-1)+1]^2 + 4[(x-1)+1] + 4 - 1 = 2(x-1)^2 + 8(x-1) + 3$.
E. 10: Lösen Sie nach: „b“ auf : $\int_1^b x^{n-1} dx = \frac{2}{n} \wedge n \neq 0$!   **CA.:20.52:** Es gilt: $\int_1^b x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \cdot x^n \Big\vert_1^b = \frac{1}{n} \cdot \left(b^n - 1\right) = \frac{2}{n} \to 2 = b^n - 1 \to 3 = b^n \to b = \sqrt[n]{3}$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

LA: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

DM: 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

Sch: Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, J. Schwarze**,** 5. Auflage.