

P + V 02 – Mathematik - Klausur Nr. 2, Wintersemester 2002 / 2003, 11. 03. 2003, Großer Hörsaal, 10.30 – 12.30 Uhr
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Der Termin für die letzte Klausur 3 wird bekannt gegeben.

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2} !$

A. 02: Gegeben sei: $A = \{1,2\}$. Geben Sie an: $A^2 \wedge A^3 !$

B. 03: Schreiben Sie in Polarform als komplexe Zahl: $z = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) \cdot 4 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) !$

B. 04: Lösen Sie: $x^2 - i = 0 \wedge i = \sqrt{-1} \in \mathbf{I} !$

C. 05: Suchen Sie die inverse Matrix auf zu: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{Bmatrix}$ auf !

C. 06: Geben Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren an von: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix} !$

D. 07: Geben Sie die McLaurin Reihe an von: $f(x) = \ln(1-x) !$

D. 08: Geben Sie das absolute Maximum und Minimum an für: $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$; in $[-1; +3] !$

E. 09: Lösen Sie: $\int \frac{x dx}{(x+2) \cdot (x+3)}$!

E. 10: Berechnen Sie das erste Glied der Fourierreihe von: $f(x) = x^2$; in $[0; \pi]$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A / B / C / D / E)

Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01 / 02 / 03 / 04 / 05 / 06 / 07 / 08 / 09 / 10)

Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer

Wildau, den 23.03.2003

Aufgaben mit Lösungen und Herkunft der Lösungen:

A. 01: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$!

DM.: 1.199: Es ist: $A(1) := 1 = 1(3 \cdot 1 - 1) / 2 = 1$ wahr. Sei: $A(k)$ wahr, dann folgt mit:

$$A(k) := 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{k \cdot (3k - 1)}{2} \text{ wahr} \rightarrow A(k+1) := 1 + \dots + (3k - 2) + (3k + 1)$$

$$= \frac{k \cdot (3k - 1)}{2} + (3k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (3k^2 - k + 6k + 2) = \frac{1}{2} \cdot (3k^2 + 5k + 2) = \frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot [3 \cdot (k + 1) - 1] \rightarrow A(k+1) \text{ ist wahr. q. e. d.}$$

A. 02: Gegeben sei: $A = \{1, 2\}$. Geben Sie an: $A^2 \wedge A^3$!

DM.: 2.7: Es ist:

$$A^2 = AXA = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2)\} \wedge$$

$$A^3 = AXAXA = \{(1,1,1); (1,1,2); (1,2,1); (1,2,2); (2,1,1); (2,1,2); (2,2,1); (2,2,2)\}$$

B. 03: Schreiben Sie in Polarform als komplexe Zahl: $z = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) \cdot 4 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$!

CAT.: 11.31: Die Werte der trigonometrischen Funktionen sind bekannt. Es folgt:

$$z = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) \cdot 4 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 2 \cdot (1 + 0) \cdot 4 \cdot (-1 + 0) = 8 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = -8$$

B. 04: Lösen Sie: $x^2 - i = 0 \wedge i = \sqrt{-1} \in \mathbf{I}$!

CAT.: 11.70: Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Es ist: $z_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \wedge z_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$

C. 05: Suchen Sie die inverse Matrix auf zu: $A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{Bmatrix}$ auf !

LA.: 4.93: Mit dem Gauß – Jordan – Algorithmus, u. a., folgt nach einigen Schritten: $A^{-1} = \begin{Bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$

C. 06: Geben Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren an von: $A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$!

LA.: 16.4; 16.28: Das charakteristische Polynom lautet: $D|A - \lambda E| = 0 = \lambda^2 - 3\lambda - 4; \rightarrow \lambda_1 = +4; \lambda_2 = -1$. Daraus ergeben sich die Eigenvektoren wie folgt: $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ für: $\lambda_1 = +4 \wedge \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für: $\lambda_2 = -1$.

D. 07: Geben Sie die McLaurin Reihe an von: $f(x) = \ln(1 - x)$!

$$f(x) = \ln(1 - x); f(0) = 0; f'(x) = -(1 - x)^{-1}; f'(0) = -1; f''(x) = -(1 - x)^{-2}; f''(0) = -1;$$

CA.: 39.5:

$$f'''(x) = -2 \cdot (1 - x)^{-3}; f'''(0) = -1 \cdot 2; \text{etc.}; \rightarrow f(x) = \ln(1 - x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right] = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$$

D. 08: Geben Sie das absolute Maximum und Minimum an für: $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$; in: $[-1; +3]$!

CA.:13.23.: $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$; $\rightarrow f'(x) = 4x - 7 \rightarrow x_M = \frac{7}{4}$. Tabelle: $x: -1 \quad \frac{7}{4} \quad +3$
 $f(x): -1 \quad -16\frac{1}{8} \quad -13$. Damit das
 absolute Maximum bei: $x = -1$; und das absolute Minimum bei: $x = +7/4$.

E. 09: Lösen Sie: $\int \frac{x dx}{(x+2) \cdot (x+3)}$!

CA.:30.2: Integration mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x+2) \cdot (x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} \rightarrow a = -2; b = 3; \rightarrow \int \frac{x dx}{(x+2) \cdot (x+3)} = \ln \left| \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} \right| + C$$

E. 10: Berechnen Sie das erste Glied der Fourierreihe von: $f(x) = x^2$; in: $[0; \pi]$!

DGL.: 16.111: $f(x) = x^2$; in: $[0; \pi]$. Die Periodenlänge = $L = \pi$; $\rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = 2 \frac{\pi^2}{3}$.

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

CAT: 2500 Solved Problems in College Algebra And Trigonometry; P. Schmidt, Schaum's Solved Problem Series;

DGL: 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

DM: 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

LA: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;