P + V - Mathematik 2– Klausur Nr. 1, Sommersemester 2002, 03. 07. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 12 – 14 Uhr

von: Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch die mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und damit 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht stets über das Prüfungsamt; 9. Der Termin für die Klausur 2 wird u. a. durch Aushang bekannt gemacht.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an**:**

Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Zeigen Sie (Reihenentwicklung), daß: $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$!
A. 02: Geben Sie die Taylor – Reihe an für: a = - 3 von : $P_4\left(x\right) = x^4$!

B. 03: Untersuchen Sie (Lagrange) auf Extremwerte: $z(x, y) = x^2 + 2xy$ mit den Nebenbedingungen: $y + 1{,}5x = 6$!

B. 04: Geben Sie die Masse einer Kreises (Radius r = a) an, dessen Dichte numerisch gleich dem Ursprungsabstand ist.

C. 05: Lösen Sie: $y' = y^2 \wedge y(0) = +4$!

C. 06: Leiten Sie (Kirchhoff) eine Differentialgleichung ab (Reihenschaltung) für die Ladung: q (t), wenn eine elektromotorische Kraft: E (t), ein Schalter: S, eine Kapazität: C und ein Widerstand: R gegeben sind $\left\{ \frac{dq(t)}{dt} = I(t) \right\}$.

D. 07: Lösen Sie: $y'' - y' - 2y = 7 + e^{3x}$!

D. 08: Berechnen Sie die allgemeine Lösung von: $16 \cdot y'' + 8 \cdot y' + y = 0$!

E. 09: Sind die Matrizen: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3-5i \\ 3+5i & -7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5-7i \\ 4+3i & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1-2i & 4+7i \\ 1+2i & -4 & -2i \\ 4-7i & 2i & 2 \end{pmatrix}$ hermitesch ?

E. 10: Lösen Sie das nachfolgende Maximierungsproblem grafisch:

$$\left\{ G(x_1;x_2) = 12x_1 + 15x_2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} \wedge x_1;x_2 \ge 0 \right\} \quad !$$

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/B/C/D/E); Bestanden: ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/02/03/04/05/06/07/08/09/10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 29.09.2002

P + V - Mathematik 2– Klausur Nr. 1, Sommersemester 2002, 03. 07. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 12 – 14 Uhr

von: Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Aufgaben mit den Lösungen und deren Herkunft (= Literatur):

A. 01: Zeigen Sie (Reihenentwicklung), daß: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$!

CA: 39.21: Es ist die McLaurien Entwicklung: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; mit: x = 1 folgt das Ergebnis.

A. 02: Geben Sie die Taylor – Reihe an für: a = - 3 von : $P_4(x) = x^4$!

CA: 39.38: Es gibt verschiedene Methoden der Lösung, eine elegante über den Binomialsatz lautet:

$$P_4(x) = x^4 = [(x+3)-3]^4 = (x+3)^4 - 12\cdot(x+3)^3 + 54\cdot(x+3)^2 - 108\cdot(x+3) + 81$$

B. 03: Untersuchen Sie (Lagrange) auf Extremwerte: $z(x,y) = x^2 + 2xy$ mit den Nebenbedingungen: $y + 1{,}5x = 6$!

Sch: 13.2.1.;S.57; S.138: a) Die Extremwerte werden errechnet mittels:

$$z = x^2 + 2xy = f(x,y) \wedge g(x,y) = 0 = y + 1{,}5x - 6 \Rightarrow v(x,y,\lambda) = x^2 + 2xy - \lambda\cdot(y + 1{,}5x - 6) \Rightarrow$$

$$v_x(x,y,\lambda) = 0 = 2x + 2y - \lambda\cdot(1{,}5) := (1);\ v_y(x,y,\lambda) = 0 = 2x - \lambda := (2);\ v_\lambda(x,y,\lambda) = 0 = -(y + 1{,}5x - 6) := (3)$$

$$\Rightarrow \quad (2): \lambda = 2x; \Rightarrow \begin{array}{ll} -x + 2y = 0 & (1) \\ 1{,}5x + y = 6 & (3) \end{array} \Rightarrow x = +3; y = +1{,}5 \Rightarrow P(+3;\ +1{,}5;\quad +18)$$

ist Extremwert, ob Maximum oder Minimum, ist hiermit noch nicht festgestellt.

B. 04: Geben Sie die Masse einer Kreises (Radius r = a) an, dessen Dichte numerisch gleich dem Ursprungsabstand ist.

CA: 44.75+HA: In Polarkoordinaten lautet der Kreis: r = a. Dann gilt für die Masse des Kreises:

$$m = \iint_B \rho(r)\cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\cdot(r\cdot dr\cdot d\alpha); [da : \rho(r) = r] \Rightarrow m = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3}\cdot d\alpha \Rightarrow m = 2\cdot\pi\cdot\frac{a^3}{3}$$

C. 05: Lösen Sie: $y' = y^2 \wedge y(0) = +4$!

DGl.: 3.178: $y' = y^2 \wedge y(0) = +4; \int\frac{dy}{y^2} = \int dx; y_A(x) = \frac{-1}{x + C}; +4 = \frac{-1}{C} \Rightarrow C = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_S(x) = \frac{-4}{4x - 1}$

C. 06: Leiten Sie (Kirchhoff) eine Differentialgleichung ab (Reihenschaltung) für die Ladung: q (t), wenn eine elektromotorische Kraft: E (t), ein Schalter: S, eine Kapazität: C und ein Widerstand: R gegeben sind $\left\{\frac{dq(t)}{dt} = I(t)\right\}$.

DGl.: 1.90: $\mathit{Kirchhoff} : \sum u_k = 0 \Leftrightarrow RI + \frac{q}{C} = E(t) \Leftrightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) \Leftrightarrow \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C\cdot R} = \frac{1}{R}\cdot E(t)$

D. 07: Lösen Sie: $y'' - y' - 2y = 7 + e^{3x}$!

DGl.: 9.218: $y'' - y' - 2y = 7 + e^{3x} \Rightarrow y_A(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{2x} - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\cdot e^{3x}$

D. 08: Berechnen Sie die allgemeine Lösung von: $16 \cdot y''+8 \cdot y'+y = 0$!   **DGl.: 8.151:** Es gilt für: $16 \cdot y''+8 \cdot y'+y = 0; \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{4}; \Rightarrow y_A(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{x}{4}} + C_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{4}}$
E. 09: Sind die Matrizen: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3-5i \\ 3+5i & -7 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5-7i \\ 4+3i & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1-2i & 4+7i \\ 1+2i & -4 & -2i \\ 4-7i & 2i & 2 \end{pmatrix}$ hermitesch ?   **LA**: **4.2.11.+ 4.2.12.+ 4.2.14.+ 4.2.15: A, C** sind hermitesch; **B** nicht.
E. 10: Lösen Sie das nachfolgende Maximierungsproblem grafisch: $\left\{ G(x_1;x_2) = 12x_1 + 15x_2 \middle| \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} \wedge x_1;x_2 \ge 0 \right\}$!   **Sch: (S. 83; 2 + S.165):** $x_1 = 80; x_2 = 240; \wedge G(80;240) = 4560$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

LA: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

DGl.: 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

Sch: J. Schwarze: Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; 5. Auflage;