Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

P + V – Mathematik 2 – Klausur Nr. 2 , Sommer 2002 am 18. 09. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 – 12 Uhr.

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Der Termin für die Klausur 3 wird ausgehängt.

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Geben Sie die inverse Funktion von: tanh x = y = $\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ an !

A. 02: Berechnen Sie die Fourier – Koeffizienten: a_i (i = 0,1,2,...) von : y = x in: $\left[-\pi,+\pi\right]$!

B. 03: Berechnen Sie (Lagrange) die Extrema: $f(x, y, z) = 8x + 2xy + \frac{1}{4}z^2$; Nebenbedingungen : $z + 3y - 2x = 4$!

B. 04: Berechnen Sie die Kugeloberfläche mittels: $dV = r^2 dr \cdot d\alpha \cdot \sin\beta d\beta \wedge r = R \wedge 0 \le \alpha \le 2\pi \wedge 0 \le \beta \le \pi$!

C. 05: Lösen Sie: $y'(x) + 2 \cdot x \cdot y(x) = 0 \wedge y(3) = 4$!

C. 06: Lösen Sie: $\left(x + \sin y\right) \cdot dx + \left(x \cdot \cos y - 2y\right) \cdot dy = 0$ **!**

D. 07: Lösen Sie: $y''\left(x\right) - y'\left(x\right) - 2y\left(x\right) = 4 \cdot x^2$!

D. 08: Lösen Sie: $x^2 \cdot y''\left(x\right) - 6 \cdot x \cdot y'\left(x\right) = 0$ **!**

E. 09: Leiten Sie mittels „Kirchhoff“ eine Differentialgleichung ab für die Ladung: q (t), wenn eine elektromotorische Kraft: E (t), ein Schalter: S, eine Kapazität: C und ein Widerstand: R in Reihenschaltung gegeben sind $\left\{ \frac{dq(t)}{dt} = I(t) \right\}$.
E. 10: Ein Teilchen: T der Masse: 2 g bewege sich reibungslos längs der x – Achse durch eine Kraft, die numerisch gleich: 8x sei. Geben Sie die Differentialgleichung des sich bewegenden Teilchens: T und den Lösungsansatz an !

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 29.09.2002

P + V - Mathematik 2 – Klausur Nr. 2 , Sommer 2002 am 18. 09. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 – 12 Uhr.

Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

A. 01: Geben Sie die inverse Funktion von: tanh x = y = $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ an !

HA Nr. 07 vom 02.04.2002: Die inverse Funktion ergibt sich durch Tausch von: x und y :

$$x=\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} \Rightarrow x\cdot\left(e^{y}+e^{-y}\right)=e^{y}-e^{-y}\,\Big|\cdot e^{y} \Rightarrow x\cdot\left((e^{y})^{2}+1\right)=(e^{y})^{2}-1 \Rightarrow$$

$(e^{y})^{2}\left(x-1\right)=-\left(x+1\right) \Rightarrow (e^{y})^{2}=\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow (e^{y})=+\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$ *für* : $|x|<1$. Es werden die logarithmischen Rechengesetze verwandt und daß die Exponentialfunktionen nur Werte größer „0“ annehmen kann.

A. 02: Berechnen Sie die Fourier – Koeffizienten: a_i (i = 0,1,2,...) von : y = x in: $\left[-\pi,+\pi\right]$!

HA Nr. 04 vom 22. 03. 2002: Es gilt (Fourier): $f\left(x\right)=a_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx\right)$ mit:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}f\left(x\right)dx;\ a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}f\left(x\right)\cdot\cos nx\cdot dx;\ n=1,2,...\Rightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}x dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}x\cdot\cos nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{\cos n(-\pi)}{n^2}+\frac{\pi\cdot\sin n\pi}{n}-\frac{\pi\sin n(-\pi)}{n}\right]=0$$

B. 03: Berechnen Sie (Lagrange) die Extrema: $f\left(x,y,z\right)=8x+2xy+\frac{1}{4}z^2$; Nebenbedingungen : $z+3y-2x=4$!

Oh:8.7.a) S.317+S.394:

$$f\left(x,y,z,\lambda\right)=8x+2xy+\frac{1}{4}z^2-\lambda\cdot\left(z+3y-2x-4\right)\Rightarrow 1.)f_x=0=8+2y+2\lambda;\ 2.)f_y=0=2x-3\lambda$$

$$3.)f_z=0=\frac{1}{2}z-\lambda;\ 4.)f_\lambda=0=z+3y-2x-4\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}z;\Rightarrow\begin{array}{rl} -2x+3y+z&=4\\ +2x\quad -\frac{3}{2}z&=0\\ +2y+z&=-8\end{array}\Rightarrow\begin{array}{rcl}x&=&-6\\ y&=&0\\ z&=&-8\end{array};\ f\left(\min\right)=-32$$

B. 04: Berechnen Sie die Kugeloberfläche mittels: $dV=r^2dr\cdot d\alpha\cdot\sin\beta d\beta\wedge r=R\ \wedge 0\le\alpha\le 2\pi\wedge 0\le\beta\le\pi$!

C. 44.50: Die Kugeloberfläche ergibt sich aus: $O=R^2\cdot\int_{\alpha=0}^{2\pi}d\alpha\cdot\int_{\beta=0}^{\pi}\sin\beta d\beta=4\cdot\pi\cdot R^2$

C. 05: Lösen Sie: $y'\left(x\right)+2\cdot x\cdot y\left(x\right)=0\ \wedge\ y\left(3\right)=4$!

DGl.:5.9+5.104: Die Integration nach Trennung der Variablen ergibt: $y\left(x\right)=C\cdot e^{-x^2}$: Das Einsetzen der Anfangswerte:

$$y_A\left(x\right)=C\cdot e^{-x^2}\Rightarrow 4=C\cdot e^{-\left(3\right)^2}=C\cdot e^{-9}\Rightarrow C=4\cdot e^{+9}\Rightarrow y_S\left(x\right)=4\cdot e^{+9}\cdot e^{-x^2}=4\cdot e^{-\left(x^2-9\right)}$$

C. 06: Lösen Sie: $\left(x+\sin y\right)\cdot dx+\left(x\cdot\cos y-2y\right)\cdot dy=0$ **!**

DGl.:4.45: Das ist eine exakte DGl. mit: $M\left(x,y\right)=\left(x+\sin y\right)\wedge N\left(x,y\right)=\left(x\cdot\cos y-2y\right)\wedge\frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}\Rightarrow$

$\int M\left(x,y\right)dx=\int\left(x+\sin y\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x\sin y+h\left(y\right)\wedge N\left(x,y\right)=\left(x\cdot\cos y-2y\right)=\frac{\partial\int M\left(x,y\right)dx}{\partial y}=x\cdot\cos y+h'\left(y\right)$

$\Rightarrow h'\left(y\right)=-2y\Rightarrow h\left(y\right)=-y^2+C\Rightarrow u\left(x,y\right)=K=\frac{1}{2}x^2+x\sin y-y^2+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+x\sin y-y^2=c$

D. 07: Lösen Sie: $y''\left(x\right)-y'\left(x\right)-2y\left(x\right)=4\cdot x^2$!

DGl.:9.35: Die Lösung lautet: $y_A\left(x\right)=y_h\left(x\right)+y_i\left(x\right)\wedge y_h\left(x\right)=c_1e^{-x}+c_2e^{+2x}\wedge y_i\left(x\right)=\sum_{k=0}^{2}a_k\cdot x^k$

$\Rightarrow y_i\left(x\right)=a_2\cdot x^2+a_1\cdot x^1+a_0\wedge y'_i\left(x\right)=2a_2\cdot x+a_1\wedge y''_i\left(x\right)=2a_2$. Einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$y_A\left(x\right)=y_h\left(x\right)+y_i\left(x\right)=c_1e^{-x}+c_2e^{+2x}-2x^2+2x-3$

D. 08: Lösen Sie: $x^2\cdot y''\left(x\right)-6\cdot x\cdot y'\left(x\right)=0$ **!**

DGl.:8.233+HA Nr. 82 vom 19. 06. 2002: Euler – Cauchy - Differentialgleichung: Lösung: a) Trennung der Variablen:

$x^2y''-6xy'=0\Rightarrow\frac{y''}{y'}=+\frac{6}{x}\Rightarrow\ln y'=6\ln x+\ln C\Rightarrow y'=K\cdot x^6\Rightarrow y_A\left(x\right)=K_1\cdot x^7+K_2;q.e.d.$ b)Standardansatz:

$x^2y''-6xy'=0$: $y\left(x\right)=x^m;\Rightarrow y'\left(x\right)=m\cdot x^{m-1};\Rightarrow y''\left(x\right)=m\cdot\left(m-1\right)\cdot x^{m-2};einsetzen\Rightarrow$

$x^2\left[m\cdot\left(m-1\right)\cdot x^{m-2}\right]-6x\left[m\cdot x^{m-1}\right]=0\Rightarrow m_1=0;m_2=+7;\Rightarrow y_A\left(x\right)=C_1\cdot x^0+C_2\cdot x^7=C_1+C_2\cdot x^7$

E. 09: Leiten Sie mittels „Kirchhoff" eine Differentialgleichung ab für die Ladung: q (t), wenn eine elektromotorische Kraft: E (t), ein Schalter: S, eine Kapazität: C und ein Widerstand: R in Reihenschaltung gegeben sind $\left\{\frac{dq\left(t\right)}{dt}=I\left(t\right)\right\}$.

DGl.: 1.90: $Kirchhoff:\sum u_k=0\Leftrightarrow RI+\frac{q}{C}=E\left(t\right)\Leftrightarrow R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E\left(t\right)\Leftrightarrow\frac{dq\left(t\right)}{dt}+\frac{q\left(t\right)}{C\cdot R}=\frac{1}{R}\cdot E\left(t\right)$

E. 10: Ein Teilchen: T der Masse: 2 g bewege sich reibungslos längs der x – Achse durch eine Kraft, die numerisch gleich: 8x sei. Geben Sie die Differentialgleichung des sich bewegenden Teilchens: T und den Lösungsansatz an !

DGl.: 11.52: Sei die Bewegung in Richtung der positiven x – Achse, dann gilt mit Newtons Gesetzen:

$$\Sigma\mathbf{F}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{2}\mathbf{F}_i\Rightarrow m\cdot\ddot{x}\left(t\right)+F=0\Leftrightarrow 2\cdot\frac{d^2x\left(t\right)}{dt^2}+8\cdot x\left(t\right)=0\Leftrightarrow\ddot{x}+4x=0;Lösungsansatz:x\left(t\right)=C\cdot e^{\lambda\cdot t}$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

C: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

DGl: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

HA: Hausaufgabennummer mit Datum im Sommersemester 2002;

Oh: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I; D. Ohse; 4. Auflage; Vahlen.