

P + V - Mathematik 2 – Klausur Nr. 3 zum Sommersemester 2002 am 16. 12. 2003, Haus 1, R. 1116 , 14 – 16 Uhr
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punkteabzug; 6. Die Klausur ist bestanden, wenn aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte; 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich nur über das Prüfungsamt; **9. Dies ist die letzte mögliche Prüfung als eine Klausur.**

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

Die Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Berechnen Sie die Fourier – Koeffizienten: a_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) von : $y = x$ in: $[-\pi, +\pi]$!

A. 02: Geben Sie die inverse Funktion von: $\tanh x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ an !

B. 03: Berechnen Sie die Kugeloberfläche mittels: $dV = r^2 dr \cdot d\alpha \cdot \sin\beta d\beta$ $\wedge r = R \wedge 0 \leq \alpha \leq 2\pi \wedge 0 \leq \beta \leq \pi$!

B. 04: Berechnen Sie (Lagrange) die Extrema: $f(x, y, z) = 8x + 2xy + \frac{1}{4}z^2$; Nebenbedingungen : $z + 3y - 2x = 4$!

C. 05: : Lösen Sie: $(x + \sin y) \cdot dx + (x \cdot \cos y - 2 \cdot y) \cdot dy = 0$!

C. 06: Geben Sie die Lösung an von: $y' - 2 \cdot x \cdot y = x$!

D. 07: Lösen Sie: $x^2 \cdot y''(x) - 6 \cdot x \cdot y'(x) = 0$!

D. 08: Geben Sie die Lösung an von: $\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \cdot y$!

E. 09: Ein Teilchen: T der Masse: 2 g bewege sich reibungslos längs der x – Achse durch eine Kraft, die numerisch gleich: $8x$ sei. Geben Sie die Differentialgleichung des sich bewegenden Teilchens und den Lösungsansatz an !

E. 10: Geben Sie die orthogonalen Trajektorien an zu den Geraden: $y = m x$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E);

Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10);

Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

A. 01: Berechnen Sie die Fourier – Koeffizienten: a_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) von $y = x$ in: $[-\pi, +\pi]$!

HA Nr. 04 vom 22. 03. 2002: Es gilt (Fourier): $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$ mit:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx; a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos nx \cdot dx; n = 1, 2, \dots \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} x \cdot \cos nx \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos(-n\pi)}{n^2} + \frac{\pi \cdot \sin n\pi}{n} - \frac{\pi \sin(-n\pi)}{n} \right] = 0$$

A. 02: Geben Sie die inverse Funktion von: $\tanh x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ an !

HA Nr. 07 vom 02.04.2002: Die inverse Funktion ergibt sich durch Tausch von: x und: y :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow x \cdot (e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y} \mid \cdot e^y \Rightarrow x \cdot (e^{2y} + 1) = (e^y)^2 - 1 \Rightarrow$$

$$(e^y)^2 (x - 1) = -(x + 1) \Rightarrow (e^y)^2 = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow (e^y) = + \left\{ \frac{1+x}{1-x} \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ für } : |x| < 1.$$

Es werden die logarithmischen Rechengesetze verwandt und daß die Exponentialfunktionen nur Werte größer „0“ annehmen kann.

B. 03: Berechnen Sie die Kugeloberfläche mittels: $dV = r^2 dr \cdot d\alpha \cdot \sin\beta \cdot d\beta$ in $\wedge r = R \wedge 0 \leq \alpha \leq 2\pi \wedge 0 \leq \beta \leq \pi$!

$$\text{CA. 44.50: Die Kugeloberfläche ergibt sich aus: } O = R^2 \cdot \int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha \cdot \int_{\beta=0}^{\pi} \sin\beta d\beta = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

B. 04: Berechnen Sie (Lagrange) die Extrema: $f(x, y, z) = 8x + 2xy + \frac{1}{4}z^2$; Nebenbedingungen : $z + 3y - 2x = 4$!

Oh:8.7.a) S.317+S.394:

$$f(x, y, z, \lambda) = 8x + 2xy + \frac{1}{4}z^2 - \lambda \cdot (z + 3y - 2x - 4) \Rightarrow 1.)f_x = 0 = 8 + 2y + 2\lambda \quad 2.)f_y = 0 = 2x - 3\lambda$$

$$\begin{array}{rcl} -2x + 3y + z & = & 4 \\ x & = & -6 \\ 3.)f_z = 0 = \frac{1}{2}z - \lambda; & 4.)f_\lambda = 0 = z + 3y - 2x - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}z; \Rightarrow & +2x - \frac{3}{2}z = 0 \Rightarrow y = 0; f(\min) = -32 \\ & & +2y + z = -8 \quad z = -8 \end{array}$$

C. 05: : Lösen Sie: $(x + \sin y) \cdot dx + (x \cdot \cos y - 2y) \cdot dy = 0$!

DGL:4.45: Das ist eine exakte DGL mit: $M(x, y) = (x + \sin y) \wedge N(x, y) = (x \cdot \cos y - 2y) \wedge \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \Rightarrow$

$$\int M(x, y) dx = \int (x + \sin y) dx = \frac{1}{2}x^2 + x \sin y + h(y) \wedge N(x, y) = (x \cdot \cos y - 2y) = \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} = x \cdot \cos y + h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + C \Rightarrow u(x, y) = K = \frac{1}{2}x^2 + x \sin y - y^2 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x \sin y - y^2 = c$$

C. 06: Geben Sie die Lösung an von: $y' - 2x \cdot y = x$!

DGL.:5.42: Es gibt einige Möglichkeiten der Integration: 1.) $p(x) = -2x; \Rightarrow I(x, y) = \exp\left\{\int p(x)dx\right\} = e^{-x^2}$; damit

$$\text{folgt: } e^{-x^2} \cdot y' - 2xe^{-x^2} = xe^{-x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left\{ y \cdot e^{-x^2} \right\} = x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y(x) = C \cdot e^{+x^2} - \frac{1}{2} \text{ (Integration).}$$

$$y_A = y_h + y_i; \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx \Rightarrow y_h(x) = Ce^{x^2}; y_i(x) = ax + b; y_i'(x) = a; \Rightarrow y_i(x) = -\frac{1}{2}$$

2.)

$$\Rightarrow y_A(x) = C \cdot e^{+x^2} - \frac{1}{2}$$

D. 07: Lösen Sie: $x^2 \cdot y''(x) - 6 \cdot x \cdot y'(x) = 0$!

DGL.:8.233+HA Nr. 82 vom 19. 06. 2002: Euler – Cauchy - Differentialgleichung: Lösung: a) Trennung der Variablen:

$$x^2 y'' - 6xy' = 0 \Rightarrow \frac{y''}{y'} = + \frac{6}{x} \Rightarrow \ln y' = 6 \ln x + \ln C \Rightarrow y' = K \cdot x^6 \Rightarrow y_A(x) = K_1 \cdot x^7 + K_2; \text{ q.e.d. b) Standardansatz:}$$

$$x^2 y'' - 6xy' = 0: y(x) = x^m; \Rightarrow y'(x) = m \cdot x^{m-1}; \Rightarrow y''(x) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}; \text{ einsetzen } \Rightarrow$$

$$x^2 [m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}] - 6x [m \cdot x^{m-1}] = 0 \Rightarrow m_1 = 0; m_2 = +7; \Rightarrow y_A(x) = C_1 \cdot x^0 + C_2 \cdot x^7 = C_1 + C_2 \cdot x^7$$

D. 08: Geben Sie die Lösung an von: $\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 \cdot y$!

CA.:46.55: Das ist eine DGL. 2. Ordnung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 \cdot y = 0; \text{ mit } y = Ce^{\lambda \cdot x} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \cdot a; \Rightarrow y(x) = C_1 e^{i ax} + C_2 e^{-i ax} = A \sin ax + B \cos ax$$

E. 09: Ein Teilchen: T der Masse: 2 g bewege sich reibungslos längs der x – Achse durch eine Kraft, die numerisch gleich: $8x$ sei. Geben Sie die Differentialgleichung des sich bewegenden Teilchens und den Lösungsansatz an !

DGL.: 11.52: Sei die Bewegung in Richtung der positiven x – Achse, dann gilt mit Newtons Gesetzen:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 F_i \Rightarrow m \cdot x''(t) + F = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 8 \cdot x(t) = 0 \Leftrightarrow x'' + 4x = 0; \text{ Lösungsansatz: } x(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

E. 10: Geben Sie die orthogonalen Trajektorien an zu den Geraden: $y = m x$!

CA.: 46.24: Die Geraden laufen alle durch den Ursprung; intuitiv ist damit klar, daß es sich um konzentrische Kreise handeln muß !

$$\text{Die Rechnung ergibt: } \frac{dy}{dx} = m = \frac{y}{x}; \text{ damit } \Rightarrow: \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \Rightarrow \int y dy = -\int x dx \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + C \Leftrightarrow y^2 + x^2 = R^2$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

DGL: 3000 Solved Problems in Linear Algebra; S. Lipschutz, Schaum's Solved Problem Series;

HA: Hausaufgaben in jenem Semester;

LA: 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

Oh: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, D. Ohse, Vahlen Verlag, 4. Auflage, 1998.