

P + V - Mathematik 2 – Klausur Nr. 1, Sommersemester 2003, 30. 06. 2003, Haus 1, Raum 1003, 10 – 12 Uhr
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch die mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punkteabzug; 6. Die Klausur ist bestanden, wenn aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich nur über das Prüfungsamt; 9. Der Termin für die Klausur 2 wird durch Aushang bekannt gemacht.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Der Radius einer Kugel ändere sich mit: 3 Millimetern pro Sekunde. Wie schnell ändert sich das Volumen, wenn die Kugeloberfläche: 10 Quadratmillimeter beträgt ?

A. 02: Geben Sie durch Multiplikation der MacLaurien Reihen die ersten vier Terme an von: $e^x \cdot \sin x$!

B. 03: Geben Sie die ersten partiellen Ableitungen an von: $f(x_1; x_2; x_3; x_4) = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - x_4 \cdot e^{x_3 \cdot x_2}$!

B. 04: Berechnen Sie: $I = \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=1}^{x=5} (x + 2y) \cdot dx \cdot dy$!

C. 05: Lösen Sie: $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$!

C. 06: Gegeben sei die Temperaturänderung eines Körpers, die proportional sein soll zur Temperaturdifferenz dieses Körpers und seiner Umgebung. Geben Sie die Differentialgleichung des Abkühlungsprozesses des Körpers an.

D. 07: Lösen Sie die Differentialgleichung: $y'''+y' = 0$!

D. 08: Eine Masse: $m = 10$ kg hängt an einer Feder und zieht diese: $0,7$ m aus. Aus der Ruheposition werde die Masse: m mit: 1 m/s nach oben beschleunigt bei einem Luftwiderstand von: -90 kg/s. Geben Sie die Differentialgleichung an!

E. 09: Geben Sie den Einheitsvektor senkrecht zur Ebene mit den Punkten: P1 (1;-1;4); P2 (2;0;1); P3 (0;2;3) an.

E. 10: Stühle und Tische werden an den beiden Maschinen: A und: B hergestellt.
A benötigt für einen Stuhl: 2 Stunden (h), B: 1 (h.) A für den Tisch: 1 (h); B: 2 (h). A und: B sind pro Tag 12 (h)
betriebsbereit. Ein Stuhl kostet: 300 Euro, ein Tisch: 400 Euro. Maximieren Sie den Gewinn mittels der Simplexmethode !

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E)

Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10)

Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer

Wildau, den 01.07.2003

Die Aufgaben mit den Lösungen und deren Herkunft (= Literatur):

<p>A. 01: Der Radius einer Kugel ändere sich mit: 3 Millimetern pro Sekunde. Wie schnell ändert sich das Volumen, wenn die Kugeloberfläche: 10 Quadratmillimeter beträgt ?</p> <p>CA.: 14.13: Es ist: $A_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \wedge V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \rightarrow \frac{dV_K}{dr} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = A_K \rightarrow \Delta V_K = A_K \cdot \Delta r = 10 \cdot 3 = 30 \left[\frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \right]$</p>
<p>A. 02: Geben Sie durch Multiplikation der MacLaurien Reihen die ersten vier Terme an von: $e^x \cdot \sin x$!</p> <p>CA.: 38.80: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \wedge \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots \rightarrow e^x \cdot \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} \pm \dots$</p>
<p>B. 03: Geben Sie die ersten partiellen Ableitungen an von: $f(x_1; x_2; x_3; x_4) = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) - x_4 \cdot e^{x_3 \cdot x_2}$!</p> <p>CA.: 42.11: Es gilt nach der vereinfachenden Umstellung: $f = \ln x_1 - \ln x_2 - x_4 \cdot e^{x_3 \cdot x_2} \rightarrow f_{x_1} = \frac{1}{x_1}; f_{x_2} = -\frac{1}{x_2} - x_3 x_4 \cdot e^{x_3 \cdot x_2}; f_{x_3} = -x_2 x_4 \cdot e^{x_3 \cdot x_2}; f_{x_4} = -e^{x_3 \cdot x_2}$</p>
<p>B. 04: Berechnen Sie: $I = \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=1}^{x=5} (x + 2y) \cdot dx \cdot dy$!</p> <p>CA.: 44.1: Es gilt: $I = \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=1}^{x=5} (x + 2y) \cdot dx \cdot dy = \int_2^3 \left[\int_1^5 (x + 2y) \cdot dx \right] \cdot dy = \int_2^3 (8y + 12) \cdot dy = \left(4 \cdot y^2 + 12 \cdot y \right) \Big _2^3 = 32$</p>
<p>C. 05: Lösen Sie: $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$!</p> <p>DGL.:5.12: Das ist eine DGL. 1. Ordnung mit der Lösung: $y(t) = C \cdot \exp \left[-\frac{t^4}{4} \right]$.</p>
<p>C. 06: Gegeben sei die Temperaturänderung eines Körpers, die proportional sein soll zur Temperaturdifferenz dieses Körpers und seiner Umgebung. Geben Sie die Differentialgleichung des Abkühlungsprozesses des Körpers an.</p> <p>DGL.:6.51: (Newtons Abkühlungsgesetz) Mit der zeitlichen Temperaturänderung: T(t) und der Umgebungstemperatur: T_m: $\frac{dT(t)}{dt} \approx (T(t) - T_m) \leftrightarrow \frac{dT(t)}{dt} = k \cdot [T(t) - T_m] \rightarrow \frac{dT(t)}{dt} + K \cdot T(t) = K \cdot T_m$; Gesucht ist: T (t).</p>
<p>D. 07: Lösen Sie die Differentialgleichung: $y'''+y' = 0$!</p> <p>DGL.:8.108: Das ist eine DGL. 3. Ordnung mit einem charakteristischen Polynom und der Lösung (komplex; reell): $y'''+y' = 0 \rightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0 \rightarrow y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{ix} + C_3 \cdot e^{-ix} = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x$</p>

D. 08: Eine Masse: $m = 10 \text{ kg}$ hängt an einer Feder und zieht diese: $0,7 \text{ m}$ aus. Aus der Ruheposition bewege sich die Masse: m mit: $v = 1 \text{ m/s}$ nach oben bei einem Luftwiderstand von: -90 kg/s . Geben Sie die Differentialgleichung an!

DGL:1.74; 1.78; 11.17: Die DGL lautet wie folgt: Im Gleichgewicht sind die Kräfte ausgeglichen, also: die Hooke'sche Kraft gleich der Erdbeschleunigung: Damit die Federkonstante: $k = 140 \text{ N/m}$ und mit: $m = 10 \text{ kg}$; $c = 90 \text{ kg/s}$ folgt:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{90}{10} \cdot \dot{x} + \frac{140}{10} \cdot x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 9 \cdot \dot{x} + 14 \cdot x = 0$$

E. 09: Geben Sie den Einheitsvektor senkrecht zur Ebene mit den Punkten: $P_1 (1; -1; 4)$; $P_2 (2; 0; 1)$; $P_3 (0; 2; 3)$ an.

$$\text{CA.:40.42: } \vec{n} = \text{P1P2} \times \text{P1P3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_e = \frac{\sqrt{6}}{24} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E. 10: Stühle und Tische werden an den beiden Maschinen: A und B hergestellt.

A benötigt für einen Stuhl: 2 Stunden (h), B: 1 (h). A für den Tisch: 1 (h); B: 2 (h). A und B sind pro Tag 12 (h) betriebsbereit. Ein Stuhl kostet: 300 Euro, ein Tisch: 400 Euro. Maximieren Sie den Gewinn mittels der Simplexmethode!

RÖ.: 9.3.3: Seien: x_1 bzw.: x_2 die pro Tag hergestellten Stühle bzw. Tische. Dann lautet das Optimierungsproblem:

Zielf. : $z(x_1; x_2) =$	$300 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2$	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Q			
NB. : $12 \geq$	$2 \cdot x_1 +$	x_2	\rightarrow	2	1	1	0	12	12	\rightarrow	$1,5$	0	1	0	12	8
NB. : $12 \geq$	$x_1 +$	$2 \cdot x_2$	\rightarrow	1	2	0	1	12	6	\rightarrow	$0,5$	1	0	1	12	24
NN. : $0 \leq$	$x_1; x_2$			-300	-400	0	0	0			-100	0	0	200	2400	

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Q	
\rightarrow 1	0			4	4	Das Simplex Programm ist beendet mit einem Wert für die Zielfunktion.
0	1	0		4	4	\rightarrow Dieser Wert beträgt : $z(x_1; x_2) = 2800$ Euro für 4 Stühle und Tische täglich.
0	0		200	2800		

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

DGL: 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

RÖ: Wirtschaftsmathematik für Studium und Praxis 1; W. Rödder; Springer Verlag.