P + V 02 – Mathematik 2 – Klausur Nr. 2 , Sommer 2003 am 16. 09. 2003, Haus 3, Großer Hörsaal, 13 – 15 Uhr.

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IWI

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch die mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punkteabzug; 6. Die Klausur ist bestanden, wenn aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich **nur** über das Prüfungsamt; **9. Der Termin für die Klausur 3 wird rechtzeitig bekannt gegeben.**

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

Die Aufgaben und Ihre Lösungen:

A. 01: Berechnen Sie die Taylor – Reihe für: a = 1 von : $f(x) = e^{-x^2}$ mit etwa drei Gliedern.
A. 02: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten: a_0 von: $f(x) = x^2$ in : $[0, \pi]$!

B. 03: Berechnen Sie die Extrema von: $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Geben Sie die Art des Extremwertes an !

B. 04: Was ergibt: $\int_{\alpha=-\pi}^{\alpha=+\pi} \int_{r=0}^{r=2} r \cdot \sin\alpha \cdot dr \cdot d\alpha$?

C. 05: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von: $\mathbf{A} = \left\{ \begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \right\}$!

C. 06 Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ?
Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

		Arbeitszeit	pro Stück	Nutzung der
	Maschine	P1	P2	Maschinen pro Stück
Tabelle:	1	1	2	120
	2	1	1	80
	3	1	0	60

D. 07: Das Experiment ergibt für Gase geringen Drucks: p bei konstanter Temperatur: T, daß sich die Volumenänderung: V (p) proportional zu: - V / p verhält. Geben Sie die Differentialgleichung an und lösen Sie sie. (Boyle – Mariotte).

D. 08: Lösen Sie: $4 \cdot x \cdot dx + 9 \cdot y \cdot dy = 0 \wedge y(3) = 0$!

E. 09: Zeigen Sie, wie mittels Potenzreihe die Differentialgleichung gelöst wird: $x \cdot y' = 3 \cdot y + 3$!

E. 10: Zeigen Sie mit der komplexen Methode die Lösung für: $t \to \infty$ von: $y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot \sin 2t$ **!**

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E); Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer

Wildau, den 27.09.2003

P + V - Mathematik 2 – Klausur Nr. 2 , Sommer 2002 am 18. 09. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 10 – 12 Uhr.
Die Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Aufgaben (= Literaturangabe):

A. 01: Berechnen Sie die Taylor – Reihe für: a = 1 von : $f(x) = e^{-x^2}$ mit etwa drei Gliedern.

Hausaufgabe Nr. 03 vom: 20. 03. 2003: Die Taylor – Reihe errechnet sich aus:

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + .. \to f(1) = e^{-1}; f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \to f'(1) = -\frac{2}{e};$$

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) \to f''(1) = \frac{2}{e}; f'''(x) = e^{-x^2} \cdot (-8x^3 + 12x) \to f'''(1) = \frac{4}{e}; \to$$

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-1) + \frac{2}{e} \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{4}{e} \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{20}{e} \cdot \frac{(x-1)^4}{4!} \pm ...$$

A. 02: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten: a_0 von: $f(x) = x^2$ in : $[0, \pi]$!

Hausaufgabe Nr. 01 vom: 20. 03. 2003: Die Fourier – Reihe lautet:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right); \text{mit} : a_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot dx \wedge f(x) = x^2; \text{in} : [0; \pi]. \to L = \pi; \to$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = 2\frac{\pi^2}{3}$$

B. 03: Berechnen Sie die Extrema von: f (x, y) = 4 – x^2 – y^2 . Geben Sie die Art des Extremwertes an !

L - Hausaufgabe Nr. 50 vom: 19. 05. 2003: Die Extrema werden über die partiellen Ableitungen berechnet:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x_{kP} = 0 \wedge \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y_{kP} = 0 \to P_{\text{kritische Punkt}} = (0; 0; 4); \wedge$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \to D_{\text{Hesse}} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x} \right]^2 = +4 > 0$$

$$\to \text{Maximum oder Minimum}. \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -2 \to P_{\text{kritische Punkt}} = (0; 0; 4) \text{ ist ein Maximum.}$$

B. 04: Was ergibt: $\int_{\alpha=-\pi}^{\alpha=+\pi} \int_{r=0}^{r=2} r \cdot \sin\alpha \cdot dr \cdot d\alpha$?

CA. 44.3.: Es ergibt sich: $\int_{\alpha=-\pi}^{\alpha=+\pi} \int_{r=0}^{r=2} r \cdot \sin\alpha \cdot dr \cdot d\alpha = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=2} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\alpha \cdot d\alpha = 2 \cdot [-\cos\alpha]_{-\pi}^{+\pi} = -2 \cdot [-1 - (-1)] = 0$

C. 05: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Bmatrix}$!

Hausaufgabe Nr. 06 vom: 20. 03. 2003: Berechnung der: 1. Eigenwerte und: 2. Eigenvektoren:

$$1.) (A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0; \to \det \begin{Bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{Bmatrix} = 0 \to (4-\lambda) \cdot (8-\lambda) \cdot (6-\lambda) = 0. \to \text{Eigenwerte} : \begin{matrix} \lambda_1 & = & 4 \\ \lambda_2 & = & 8 \\ \lambda_3 & = & 6 \end{matrix}$$

$$2. \text{Eigenvektoren} : \lambda_1 = 4 : \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge$$

$$\lambda_2 = 8 : \begin{Bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda_3 = 6 \to \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C. 06 Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ?
Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

		Arbeitszeit	pro Stück	Nutzung der
	Maschine	P1	P2	Maschinen pro Stück
Tabelle:	1	1	2	120
	2	1	1	80
	3	1	0	60

Bo. S. 195; 4 + S. 213, 4: Die Simplex – Tableaus lauten mit dem Ergebnis : $z(x_1, x_2) = 1000 \text{ Euro} \wedge x_1 = x_2 = 40$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Q		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Q		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
1	**2**	1	0	0	120	60		0,5	1	0,5	0	0	60	120		0	**1**	1	− 1	0	**40**
1	1	0	1	0	80	80	→	**1**	0	− 1	2	0	40	80	→	**1**	0	− 1	2	0	**40**
1	0	0	0	1	60	∞		1	0	0	0	1	60	∞		0	0	1	− 2	1	60
− 10	− 15	0	0	0				− 2,5	0	15	0	0	900			0	0	12,5	5	0	**1.000 = z**

D. 07: Das Experiment ergibt für Gase geringen Drucks: p bei konstanter Temperatur: T, daß sich die Volumenänderung: V (p) proportional zu: - V / p verhält. Geben Sie die Differentialgleichung an und lösen Sie sie. (Boyle – Mariotte).

K.: S. 19, 17;S. A 6: Die Differentialgleichung mit der Lösung lautet:

$$\frac{dV(p)}{dp} \approx -\frac{V}{p} \to \frac{dV(p)}{dp} = k \cdot \frac{V}{p} \to \int \frac{dV}{V} = k \cdot \int \frac{dp}{p} \to V = C \cdot p^{k} \to \frac{V}{p^{k}} = C; \text{üblich ist} : k = -1 \text{ (Boyle - Mariotte)}$$

D. 08: : Lösen Sie: $4 \cdot x \cdot dx + 9 \cdot y \cdot dy = 0 \wedge y(3) = 0$!

K.: S. 58, 27, S. A 9: Die Differentialgleichung 1. Ordnung läßt sich direkt integrieren:

$$4 \cdot \int x \cdot dx + 9 \cdot \int y \cdot dy = \int 0 dx \to 4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = C \text{ (Allg. Lös.)}; y(3) = 0 \to 4 \cdot 3^2 = 36 = 4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 \text{ (Spez.Lös.)}$$

E. 09: Zeigen Sie, wie mittels Potenzreihe die Differentialgleichung gelöst wird: $x \cdot y' = 3 \cdot y + 3$!

K.: S. 208; 1, A 16:

$$\text{Ansatz}: y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_k \cdot x^k + ...; \text{ mit}: y'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i-1} = a_1 + ... + k \cdot a_k \cdot x^{k-1} + ...$$

$$\text{Einsetzen ergibt}: a_1 \cdot x + a_1 \cdot 2 \cdot x^2 + a_3 \cdot 3 \cdot x^3 + a_4 \cdot 4 \cdot x^4 + ... = 3 + 3 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 \cdot x + 3 \cdot a_2 \cdot x^2 + 3 \cdot a_3 \cdot x^3 + ..$$

$$\text{Der Koeffizientenvergleich ergibt}: 0 = 3 + 3 \cdot a_0 \wedge a_1 = 3 \cdot a_1 \wedge 2 \cdot a_1 = 3 \cdot a_3 \wedge 4 \cdot a_4 = 2 \cdot a_2 \wedge 2 \cdot a_3 = 5 \cdot a_5 \wedge .... \to$$

$$a_0 = -1 \wedge a_3 = a_3 \wedge a_2 = 0 = a_k \ (k = 4,5,6,.....) \to \text{Die allgemeine Lösung}: y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = -1 + a_3 \cdot x^3$$

E. 10: Zeigen Sie mit der komplexen Methode die Lösung für: $t \to \infty$ von: $y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot \sin 2t$ **!**

K.: S. 123, 09,S. A 12.: Differentialgleichung 2. Ordnung komplex: $y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \to$ **.**

$$y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t}; y_p(t) = K \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \wedge y'_p(t) = -2 \cdot K \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \wedge y''_p(t) = -4 \cdot K \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot}$$

$$[-4 \cdot K \cdot i - 2 \cdot K + 4 \cdot K \cdot i] \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} = 8 \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \to K = 4i \to y_p(t) = -4 \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} = -4 \cdot \cos 2t$$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

Bo: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; K. Bosch, Oldenbourg, 13. Auflage;

CA: 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

HA: Hausaufgabennummer mit Datum im Sommersemester 2003;

K: Advanced Engineering Mathematics; E. Kreyszig; 7. Edition; John Wiley; U.S.A.;