

**P + V 2003 Mathematik 2 – Klausur Nr. 3 zum Sommersemester 2003 am 22. 01. 2004, Haus 1, R. 1003 , 08 – 10 Uhr**  
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., Lehrauftrag

**Allgemeine Hinweise:** 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punkteabzug; 6. Die Klausur ist bestanden, wenn aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte; 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich nur über das Prüfungsamt; **9. Dies ist die letzte mögliche Prüfung als eine Klausur.**

Geben Sie hier **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

**Die Aufgaben und Ihre Lösungen:**

**A. 01:** Geben Sie durch Multiplikation der MacLaurien Reihen die ersten vier Terme an von:  $e^x \cdot \sin x$  !

**A. 02:** Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten:  $a_0$  von:  $f(x) = x^2$  in  $: [0, \pi]$  !

**B. 03:** Berechnen Sie die Extrema von:  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ . Geben Sie die Art des Extremwertes an!

**B. 04:** Berechnen Sie:  $I = \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=1}^{x=5} (x + 2y) \cdot dx \cdot dy$  !

**C. 05:** Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  !

**C. 06:** Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ?  
Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P2 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

	Maschine	Arbeitszeit pro Stück		Nutzung der Maschinen pro Stück
		P1	P2	
<b>Tabelle:</b>	1	1	2	120
	2	1	1	80
	3	1	0	60

**D. 07:** Gegeben sei die Temperaturänderung eines Körpers, die proportional sein soll zur Temperaturdifferenz dieses Körpers und seiner Umgebung. Geben Sie die Differentialgleichung des Abkühlungsprozesses des Körpers an.

**D. 08:** Lösen Sie:  $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$  !

**E. 09:** Zeigen Sie, wie mittels Potenzreihe die Differentialgleichung gelöst wird:  $x \cdot y' = 3 \cdot y + 3$  !

**E. 10:** Zeigen Sie mit der komplexen Methode die Lösung für:  $t \rightarrow \infty$  von:  $y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot \sin 2t$  !

**Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!**

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/ B/ C/ D/ E);

Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: ( 01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10 );

Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

**Die Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Aufgaben:**

**A. 01:** Geben Sie durch Multiplikation der MacLaurien Reihen die ersten vier Terme an von:  $e^x \cdot \sin x$  !

**CA.: 38.80:**  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \wedge \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots \rightarrow e^x \cdot \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} \pm \dots$

**A. 02:** Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten:  $a_0$  von:  $f(x) = x^2$  in:  $[0, \pi]$  !

**Hausaufgabe Nr. 01 vom: 20. 03. 2003:** Die Fourier – Reihe lautet:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right); \text{ mit : } a_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot dx \wedge f(x) = x^2; \text{ in : } [0; \pi] \rightarrow L = \pi; \rightarrow$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = 2 \frac{\pi^2}{3}$$

**B. 03:** Berechnen Sie die Extrema von:  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ . Geben Sie die Art des Extremwertes an !

**L - Hausaufgabe Nr. 50 vom: 19. 05. 2003:** Die Extrema werden über die partiellen Ableitungen berechnet:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2x_{kP} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y_{kP} = 0 \rightarrow P_{\text{kritische Punkt}} = (0; 0; 4); \wedge$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \rightarrow D_{\text{Hesse}} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left[ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \cdot \partial x} \right]^2 = +4 > 0$$

$$\rightarrow \text{Maximum oder Minimum. } \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -2 \rightarrow P_{\text{kritische Punkt}} = (0; 0; 4) \text{ ist ein Maximum.}$$

**B. 04:** Berechnen Sie:  $I = \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=1}^{x=5} (x+2y) \cdot dx \cdot dy$  !

**CA.: 44.1:** Es gilt:  $I = \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=1}^{x=5} (x+2y) \cdot dx \cdot dy = \int_2^3 \left[ \int_1^5 (x+2y) \cdot dx \right] \cdot dy = \int_2^3 (8y+12) \cdot dy = \left( 4 \cdot y^2 + 12 \cdot y \right) \Big|_2^3 = 32$

**C. 05:** Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  !

**Hausaufgabe Nr. 06 vom: 20. 03. 2003:** Berechnung der: 1. Eigenwerte und: 2. Eigenvektoren:

$$1.) (A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0; \rightarrow \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (4 - \lambda) \cdot (8 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) = 0. \rightarrow \text{Eigenwerte : } \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 8 \\ \lambda_3 = 6 \end{matrix}$$

$$2. \text{ Eigenvektoren : } \lambda_1 = 4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge$$

$$\lambda_2 = 8 : \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda_3 = 6 \rightarrow \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**C. 06:** Produkte werden entsprechend der gegebenen Tabelle hergestellt und verkauft. Wann ist der Gewinn maximal ? Gewinn pro Stück: P1 = 15 Euro; P1 = 10 Euro. Geben Sie die Simplex – Tableaus an.

		Arbeitszeit		pro Stück		Nutzung der			
		Maschine		P1		P2		Maschinen pro Stück	
<b>Tabelle:</b>		1	1	2			120		
		2	1	1			80		
		3	1	0			60		

**Bo. S. 195; 4 + S. 213, 4:** Die Simplex – Tableaus lauten mit dem Ergebnis :  $z(x_1, x_2) = 1000 \text{ Euro} \wedge x_1 = x_2 = 40$  :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>	<b>Q</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>	<b>Q</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>
1	2	1	0	0	120	60	0,5	1	0,5	0	0	60	120	0	1	1	-1	0	40
1	1	0	1	0	80	80	→ 1	0	-1	2	0	40	80	→ 1	0	-1	2	0	40
1	0	0	0	1	60	∞	1	0	0	0	1	60	∞	0	0	1	-2	1	60
-10	-15	0	0	0			-2,5	0	15	0	0	900		0	0	12,5	5	0	1.000 = z

**D. 07:** Gegeben sei die Temperaturänderung eines Körpers, die proportional sein soll zur Temperaturdifferenz dieses Körpers und seiner Umgebung. Geben Sie die Differentialgleichung des Abkühlungsprozesses des Körpers an.

**DGL:6.51:** ( Newtons Abkühlungsgesetz ) Mit der zeitlichen Temperaturänderung:  $T(t)$  und der Umgebungstemperatur:

$$T_m: \frac{dT(t)}{dt} \approx (T(t) - T_m) \leftrightarrow \frac{dT(t)}{dt} = k \cdot [T(t) - T_m] \rightarrow \frac{dT(t)}{dt} + K \cdot T(t) = K \cdot T_m ; \text{Gesucht ist: } T(t).$$

**D. 08:** Lösen Sie:  $\frac{dy}{dt} + t^3 \cdot y = 0$  !

**DGL:5.12:** Das ist eine DGL. 1. Ordnung mit der Lösung:  $y(t) = C \cdot \exp\left[-\frac{t^4}{4}\right]$ .

**E. 09:** Zeigen Sie, wie mittels Potenzreihe die Differentialgleichung gelöst wird:  $x \cdot y' = 3 \cdot y + 3$  !

**K.: S. 208; 1, A 16:**

Ansatz:  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k + \dots$ ; mit:  $y'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i-1} = a_1 + \dots + k \cdot a_k \cdot x^{k-1} + \dots$

Einsetzen ergibt:  $a_1 \cdot x + a_1 \cdot 2 \cdot x^2 + a_3 \cdot 3 \cdot x^3 + a_4 \cdot 4 \cdot x^4 + \dots = 3 + 3 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 \cdot x + 3 \cdot a_2 \cdot x^2 + 3 \cdot a_3 \cdot x^3 + \dots$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:  $0 = 3 + 3 \cdot a_0 \wedge a_1 = 3 \cdot a_1 \wedge 2 \cdot a_1 = 3 \cdot a_3 \wedge 4 \cdot a_4 = 2 \cdot a_2 \wedge 2 \cdot a_3 = 5 \cdot a_5 \wedge \dots \rightarrow$

$a_0 = -1 \wedge a_3 = a_3 \wedge a_2 = 0 = a_k$  ( $k = 4, 5, 6, \dots$ )  $\rightarrow$  Die allgemeine Lösung:  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = -1 + a_3 \cdot x^3$

**E. 10:** Zeigen Sie mit der komplexen Methode die Lösung für:  $t \rightarrow \infty$  von:  $y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot \sin 2t$  !

**K.: S. 123, 09, S. A 12.:** Differentialgleichung 2. Ordnung komplex:  $y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \rightarrow$

$y''(t) + y'(t) + 4 \cdot y(t) = 8 \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t}$ ;  $y_p(t) = K \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \wedge y_p'(t) = -2 \cdot K \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \wedge y_p''(t) = -4 \cdot K \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t}$

$[-4 \cdot K \cdot i - 2 \cdot K + 4 \cdot K \cdot i] \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} = 8 \cdot i \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} \rightarrow K = 4i \rightarrow y_p(t) = -4 \cdot e^{2 \cdot i \cdot t} = -4 \cdot \cos 2t$

**Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:**

**Bo:** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; K. Bosch, Oldenbourg, 13. Auflage;

**CA:** 3000 Solved Problems in Calculus; E. Mendelson, Schaum's Solved Problem Series;

**DGL:** 2500 Solved Problems in Differential Equations; R. Bronson, Schaum's Solved Problem Series;

**HA:** Hausaufgabennummer mit Datum im Sommersemester 2003;

**K:** Advanced Engineering Mathematics; E. Kreyszig; 7. Edition; John Wiley; U.S.A.;