

**Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63  
WFG – 00 - Klausur Nr. 1, Wintersemester 2001/2, 26. 01. 2002, Haus 1, Raum 1003, 9.45 – 11.15 Uhr**

**Allgemeine Hinweise:** 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Wiederholungstermine werden ausgehängt.

Geben Sie bitte **Ihren Namen** und Ihre Matrikelnummer an:

**Aufgaben und Ihre Lösungen:**

**A.1:** Lösen Sie die Gleichung:  $a = b \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$  nach  $x$  ( ggf. mit einem Kommentar ) auf!

**A.2:** Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:  $3x - 2y = 7$ , und:  $x + 2y = 1$  nach geeigneter Umstellung durch Pivotisierung der Hauptdiagonalen mit den Pivotelementen = 1 und überprüfen Sie das Ergebnis als Probe !

**B.3:** Ein Kapitalbetrag in der Höhe von DM 60.000,00 wird für drei Quartale zu einem Quartalszinssatz:  $i = 10\% \text{ p. Q.}$  ausgeliehen. Es wird vereinbart, während der Laufzeit keinen Zins aufzuschlagen. Wieviel Zinsen werden jeweils erhoben?

**B.4:** Eine Maschine mit einem Wert von DM 20.000,00 wird linear über 5 Jahre auf einen Restwert von DM 3.000,00 abgeschrieben. Wie groß ist der jährliche Abschreibungsbetrag und wie sieht der Abschreibungsplan aus?

**C.5:** Zwei Produkte P1 und P2 werden von den Maschinen: **a, b, c** hergestellt. Die nachfolgende Tabelle enthält die notwendigen maschinellen Arbeitszeiten pro Mengeneinheit (**ME**), die monatlich zur Verfügung stehenden Kapazitäten der Maschinen: **a, b, c**, sowie den Gewinn pro Mengeneinheit (**ME**) in Geldeinheiten (**Ge**) für die beiden Produkte: P1 und P2. Stellen Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm auf (= Programm mit dem höchsten Gewinn)!

Maschine	Bearbeitungszeit in Stunden ( h ) pro ME		Maschinenkapazität in Stunden ( h )
	Produkt P1	Produkt P2	
<b>a</b>	4	3	600
<b>b</b>	2	2	320
<b>c</b>	3	7	840
<b>Gewinne in Ge pro ME</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	

**C.6:** Lösen Sie mittels der Simplex-Methode ( alle Variablen seien größer als Null ):

$$z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 9 \cdot x_2 + x_3; \quad x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 9; \quad 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 15 !$$

**D.7:** Folgende Alltagsausdrücke und statistische Kategorien seien Ihnen ( in alphabetischer Reihenfolge ) gegeben:  
Absolutskala; Beruf; Dichotomes Merkmal; Geschlecht; Güteklasse; Häufbares Merkmal; Nationalität; Nominalskaliertes Merkmal; Ordinalskaliertes Merkmal; Stetiges Merkmal; Stückzahl; Tagesmenge an gezapftem Treibstoff.  
Geben Sie für diese Alltagsausdrücke die zugehörigen statistischen Kategorien an!

**D.8:** Ein Zufallsexperiment sei ein einmaliges Würfeln mit einem Spielwürfel mit 6 Augen. Die ( willkürlich ) gegebenen Ereignisse seien wie folgt: A := Die Augenzahl ist gerade; B := Die Augenzahl ist ungerade; C := Die Augenzahl ist kleiner gleich 2. Geben Sie:  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \cap C$ ;  $B - A$ ; sowie  $\bar{C}$  und deren Bezeichnungen an!

**E.9:** Qualitätsregelkarten werden gewissen Bezeichnungen Prüfkriterien ( je in alphabetischer Reihenfolge ) zugeordnet. Führen Sie diese Zuordnungen durch für: kombinierte Karte ( z. B.  $\bar{x} - s$  - Karte ); Kumulierte Summen z. B. von Mittelwerten; KUSUM - Karte; Median - Karte; p - Karte; r - Karte; s - Karte; Stichproben - Einzelwerte; Stichproben - Fehleranteil; Stichproben - Fehleranzahl; Stichproben - Gesamtfehleranzahl; Stichprobenmedian; Stichprobenmittel; Stichprobenmittel und - streuung; Stichproben - Spannweite; Stichproben - Standardabweichung; u - Karte; Urwertkarte;  $\bar{x}$  - Karte; Mittelwert - Karte !

**E.10:** Gegeben ist die Funktion der Binomialverteilung:  $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}; k = 0, 1, 2, \dots$ . Berechnen Sie für:  $n = 2$  und:  $k = 0, 1, 2$  die Werte von:  $P(k)$ , wenn:  $p = 0; 0,5$  und:  $1$  sein soll.

**Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!**

Richtig bearbeitete Aufgaben: ( 01/02/03/04/05/06/07/08/09/10 ); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

**Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:**

<p><b>A.1:</b> Lösen Sie die Gleichung: <math>a = b \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}</math> nach <math>x</math> ( ggf. mit einem Kommentar ) auf!</p> <p><b>H.:</b> S.30(2.1) und S.35(2.10): <math>x^n - \frac{a}{b} \cdot x + \frac{a}{b} \cdot 1 - 1 = 0</math>. Ist eine Gleichung n-ten Grades in <math>x</math> und z. B. mittels Näherungsmethoden zu lösen außer für <math>n=1,2,3</math>.</p>																											
<p><b>A.2:</b> Lösen Sie das lineare Gleichungssystem: <math>3x - 2y = 7</math>, und: <math>x + 2y = 1</math> nach geeigneter Umstellung durch Pivottisierung der Hauptdiagonalen mit den Pivotelementen = 1 und überprüfen Sie das Ergebnis als Probe !</p> <p><b>L.:</b> S.56,3.35: Als lineares Gleichungssystem geschrieben: <math>\begin{matrix} 3x &amp; -2y &amp; = &amp; 7 &amp; x &amp; +2y &amp; = &amp; 1 \\ x &amp; +2y &amp; = &amp; 1 &amp; 3x &amp; -2y &amp; = &amp; 7 \end{matrix}</math>; damit ist in <math>a_{11}</math> bereits das gewünschte Pivotelement = 1. Es folgt durch geeignete Subtraktionen und Divisionen weiter:</p> <p><math>\begin{matrix} x &amp; +2y &amp; = &amp; 1 &amp; x &amp; +2y &amp; = &amp; 1 &amp; x &amp; +0 &amp; = &amp; 2 &amp; x &amp; = &amp; 2 \\ 0 &amp; -8y &amp; = &amp; 4 &amp; \Rightarrow &amp; 0 &amp; 1y &amp; = &amp; -\frac{1}{2} &amp; \Rightarrow &amp; 0 &amp; 1y &amp; = &amp; -\frac{1}{2} &amp; y &amp; = &amp; -\frac{1}{2} \end{matrix}</math> Die Probe: <math>\begin{matrix} 3 \cdot 2 &amp; -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &amp; = &amp; 7 \\ 2 &amp; +2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &amp; = &amp; 1 \end{matrix}</math> <i>q.e.d.</i></p>																											
<p><b>B.3:</b> Ein Kapitalbetrag in der Höhe von DM 60.000,00 wird für drei Quartale zu einem Quartalszinssatz: <math>i = 10\%</math> p. Q. ausgeliehen. Es wird vereinbart, während der Laufzeit keinen Zins aufzuschlagen. Wieviel Zinsen werden jeweils erhoben?</p> <p><b>H.:</b> B.1.1.;S.7: Gegeben: <math>K_0 = \text{DM } 60000</math>; <math>i(\text{p.Q.}) = 0,1</math>; <math>N(\text{Quartale}) = 3</math>; Gesucht ist <math>Z_{3(\text{Quartale})} = ?</math> Lösung: <math>Z_{3(\text{Quartale})} = K_0 \cdot 0,1 \cdot 3 = \text{DM } 60000 \cdot 0,1 \cdot 3 = \text{DM } 18000</math>.</p>																											
<p><b>B.4:</b> Eine Maschine mit einem Wert von DM 20.000,00 wird linear über 5 Jahre auf einen Restwert von DM 3.000,00 abgeschrieben. Wie groß ist der jährliche Abschreibungsbetrag und wie sieht der Abschreibungsplan aus?</p> <p><b>H.:</b> B.4.1.S.54: Gegeben <math>K_n = \text{DM } 3000</math> und <math>K_0 = \text{DM } 20000</math> und <math>n = 5</math>. Gesucht ist <math>a = ?</math> Lösung: <math>a = (K_0 - K_n) / n = (\text{DM } 20000 - \text{DM } 3000) / 5 = \text{DM } 3400</math>; Abschreibungsplan:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Jahr</th> <th>Buchwert(Jahresbeginn)</th> <th>a</th> <th>Buchwert Jahresende</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>20000</td> <td>3400</td> <td>16600</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>16600</td> <td>3400</td> <td>13200</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>13200</td> <td>3400</td> <td>9800</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>9800</td> <td>3400</td> <td>6400</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6400</td> <td>3400</td> <td>3000</td> </tr> </tbody> </table>				Jahr	Buchwert(Jahresbeginn)	a	Buchwert Jahresende	1	20000	3400	16600	2	16600	3400	13200	3	13200	3400	9800	4	9800	3400	6400	5	6400	3400	3000
Jahr	Buchwert(Jahresbeginn)	a	Buchwert Jahresende																								
1	20000	3400	16600																								
2	16600	3400	13200																								
3	13200	3400	9800																								
4	9800	3400	6400																								
5	6400	3400	3000																								
<p><b>C.5:</b> Zwei Produkte P1 und P2 werden von den Maschinen: <b>a, b, c</b> hergestellt. Die nachfolgende Tabelle enthält die notwendigen maschinellen Arbeitszeiten pro Mengeneinheit ( <b>ME</b> ), die monatlich zur Verfügung stehenden Kapazitäten der Maschinen: <b>a, b, c</b>, sowie den Gewinn pro Mengeneinheit ( <b>ME</b> ) in Geldeinheiten ( <b>Ge</b> ) für die beiden Produkte: P1 und: P2. Stellen Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm auf ( = Programm mit dem höchsten Gewinn )!</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Maschine</th> <th colspan="2">Bearbeitungszeit in Stunden ( h ) pro ME</th> <th rowspan="2">Maschinenkapazität in Stunden ( h )</th> </tr> <tr> <th>Produkt P1</th> <th>Produkt P2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><b>a</b></td> <td>4</td> <td>3</td> <td>600</td> </tr> <tr> <td><b>b</b></td> <td>2</td> <td>2</td> <td>320</td> </tr> <tr> <td><b>c</b></td> <td>3</td> <td>7</td> <td>840</td> </tr> <tr> <td><b>Gewinne in Ge pro ME</b></td> <td><b>2</b></td> <td><b>3</b></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>				Maschine	Bearbeitungszeit in Stunden ( h ) pro ME		Maschinenkapazität in Stunden ( h )	Produkt P1	Produkt P2	<b>a</b>	4	3	600	<b>b</b>	2	2	320	<b>c</b>	3	7	840	<b>Gewinne in Ge pro ME</b>	<b>2</b>	<b>3</b>			
Maschine	Bearbeitungszeit in Stunden ( h ) pro ME		Maschinenkapazität in Stunden ( h )																								
	Produkt P1	Produkt P2																									
<b>a</b>	4	3	600																								
<b>b</b>	2	2	320																								
<b>c</b>	3	7	840																								
<b>Gewinne in Ge pro ME</b>	<b>2</b>	<b>3</b>																									

**Dü.:** S.23 ff.: Das zugehörige lineare mathematische Modell lautet wie folgt: Seien  $x_1, x_2$ := die monatlichen Fertigungsmengen der Produkte P1 und P2, sowie:  $z(x_1, x_2)$  := die Gewinnfunktion. Dann gilt:  $z(x_1, x_2) := 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$  soll maximal werden und die Nebenbedingungen lauten:  $x_1, x_2$  sind größer oder gleich „0“, sowie:

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 600$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 320$$

$$3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 840$$

**C.6:** Lösen Sie mittels der Simplex-Methode ( alle Variablen seien größer als Null ):

$$z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 9 \cdot x_2 + x_3; \quad x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 9; \quad 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 15 !$$

**Br.:** S.34f: Das Ausgangs-Simplextableau lautet wie folgt:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$\mathbf{b}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	; es folgt: als endgültiges Simplextableau.
2	2	2	2	2	2	
$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	
$\frac{7}{2}$	0	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{81}{2}$	
2	2	2	2	2	2	

Es sind die Endwerte wie folgt ablesbar:  $z = 81/2$ ;  $x_2 = 9/2$ ; sowie  $y_2 = 6$ . Alle anderen Werte sind gleich Null.

**D.7:** Folgende Alltagsausdrücke und statistische Kategorien seien Ihnen ( in alphabetischer Reihenfolge ) gegeben: Absolutskala; Beruf; Dichotomes Merkmal; Geschlecht; Güteklasse; Häufbares Merkmal; Nationalität; Nominalskaliertes Merkmal; Ordinalskaliertes Merkmal; Stetiges Merkmal; Stückzahl; Tagesmenge an gezapftem Treibstoff.

Geben Sie für diese Alltagsausdrücke die zugehörigen statistischen Kategorien an!

**E1:** S. 13 ff.: Absolutskala= Stückzahl; Dichotomes Merkmal= Geschlecht; Häufbares Merkmal= Beruf; Nominalskaliertes Merkmal= Nationalität; Ordinalskaliertes Merkmal= Güteklasse; Stetiges Merkmal= Tagesmenge an gezapften Treibstoff.

**D.8:** Ein Zufallsexperiment sei ein einmaliges Würfeln mit einem Spielwürfel mit 6 Augen. Die ( willkürlich ) gegebenen Ereignisse seien wie folgt:  $A :=$  Die Augenzahl ist gerade;  $B :=$  Die Augenzahl ist ungerade;  $C :=$  Die Augenzahl ist kleiner gleich 2. Geben Sie:  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \cap C$ ;  $B - A$ ; sowie  $\bar{C}$  und deren Bezeichnungen an!

**E1:**, S. 57 ff.: Es gilt:

$$A = \{2,4,6\}; B = \{1,3,5\}; \text{ und } C = \{1,2\}. \text{ Damit } \Rightarrow \text{ Logische Summe } = A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega;$$

$$\text{Logische Produkte} = A \cap B = \emptyset, \text{ sowie } A \cap C = \{2\}; \text{ Logische Differenz } = B - A = \{1,3,5\};$$

$$\text{sowie: Das komplementäre Ereignis } = \bar{C} = \{1,2,3,4,5,6\} - \{1,2\} = \{3,4,5,6\}$$

**E.9:** Qualitätsregelkarten werden gewissen Bezeichnungen Prüfkriterien ( je in alphabetischer Reihenfolge ) zugeordnet. Führen Sie diese Zuordnungen durch für: kombinierte Karte ( z. B.  $\bar{x} - s$  - Karte ); Kumulierte Summen z. B. von Mittelwerten; KUSUM - Karte; Median - Karte;  $p$  - Karte;  $r$  - Karte;  $s$  - Karte; Stichproben - Einzelwerte; Stichproben - Fehleranteil; Stichproben - Fehleranzahl; Stichproben - Gesamtfehleranzahl; Stichprobenmedian; Stichprobenmittel; Stichprobenmittel und - streuung; Stichproben - Spannweite; Stichproben - Standardabweichung;  $u$  - Karte; Urwertkarte;  $\bar{x}$  - Karte; Mittelwert - Karte !

**E2, S. 67, Tabelle 2.4:** Die alphabetische Reihenfolge ist stets: Bezeichnung := Prüfkriterium:

**kombinierte Karte ( z. B.  $\bar{x} - s$  - Karte )** := Stichprobenmittel und - streuung; **KUSUM - Karte** := Kumulierte Summen z. B. von Mittelwerten; **Median - Karte** := Stichprobenmedian;  **$p$  - Karte** := Stichproben - Fehleranteil;  **$r$  - Karte** := Stichproben - Spannweite;  **$s$  - Karte** := Stichproben - Standardabweichung;  **$u$  - Karte** := Stichproben - Gesamtfehleranzahl; **Urwertkarte** := Stichproben - Einzelwerte;  **$\bar{x}$  - Karte** := Stichproben - Fehleranzahl; **Mittelwert - Karte** := Stichprobenmittel

**E.10:** Gegeben ist die Funktion der Binomialverteilung:  $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}; k = 0, 1, 2, \dots$ . Berechnen Sie

für:  $n = 2$  und:  $k = 0, 1, 2$  die Werte von:  $P(k)$ , wenn:  $p = 0; 0,5$  und:  $1$  sein soll.

**E2, Anhang, Tafel 1:** Für:  $n = 2$  gilt:  $P(k) = \binom{2}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{2-k}; k = 0, 1, 2$ . Damit folgt für:

$$k = 0 : P(0) = \binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{2-0} = (1-p)^2; \text{ sowie: } \begin{matrix} p = & 0 & 0,5 & 1 \\ P(0) & 0 & 0,25 & 0 \end{matrix}$$

$$k = 1 : P(1) = \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{2-1} = 2 \cdot p \cdot (1-p); \quad \text{sowie : } \begin{array}{ccc} p = & 0 & 0,5 & 1 \\ P(1) & 0 & 0,5 & 0 \end{array}$$

$$k = 2 : P(2) = \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{2-2} = (p)^2; \quad \text{sowie : } \begin{array}{ccc} p = & 0 & 0,5 & 1 \\ P(2) & 0 & 0,25 & 0 \end{array}$$

**Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:**

**Br:** Bronson, R. et. al. : Operations Research, Schaum's Outlines, 2. Edition, 1997

**Dü:** Dürr, W. et. Al. : Operations Research, 3. Auflage, 1992

**E1:** Eckstein, P. P.: Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. Auflage, 1998

**E2:** Eckstein, P. P.: Induktive Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 1. Auflage, 1998

**H:** Hartl, F.: Finanzmathematik, Fernstudienagentur, 1. Auflage, 1997

**L:** Lipschutz, S.: Linear Algebra, McGraw-Hill, 1989