Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63
WFG – 00 – Klausur Nr. 3 , Wintersemester 2001/02, 22. 06. 2002, Seminarraum 1020, Haus 1, 15 – 16.30 Uhr

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Klausur anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Klausurzeit beträgt 90 Minuten; 4. Erlaubt sind eine Formelsammlung, Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch weitere mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird mit 50 Punkte bestanden; 7. Jede korrekt gelöste Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Das Prüfungsamt wird die erreichten Noten bekannt geben.

Geben Sie bitte **Ihren Namen** und Ihre Matrikelnummer an:

Aufgaben und Ihre Lösungen:

01 : Lösen Sie die „Kapitalverzehrsformel“: $0 = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ nach der Laufzeit: n auf!

02 : Berechnen Sie : **X** aus: **A * X = E** mit: **A** = $\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$! Welche mathematische Bedingung ist zwingend ?

03 : Für 10 Jahre werden 2.000 Euro mit 6 % Zinsfuß festgelegt. Wie groß ist die Kapitalzunahme bei einfacher Verzinsung und wie groß bei stetiger Verzinsung (hier nur den Zahlenausdruck angeben) ?

04 : Eine Schuld von: 500,000 US$ ist inklusive Zinsen (mit: i = 8 % p. a.) innerhalb von 5 Jahren zurückzuzahlen. Stellen Sie den vollständigen Tilgungsplan auf, wenn die Tilgung in einem einzigen Betrag am Ende des 5.ten Jahres erfolgen soll, die Zinszahlungen jedoch jährlich getätigt werden!

05 : Eine Mischung: M wird aus zwei Substanzen: S1; S2 , bestehend aus drei Rohstoffen: R1; R2; R3 hergestellt. In M hat die Mindestmenge der: R_k (i = 1,...,3): 18 Gramm (g), und: 2 g bzw.: 3 g zu betragen. Folgende Mengen Rohstoffe: R_k in g pro Kilogramm (kg) sind in den Substanzen enthalten: S_1 : ($R_1 = 3$; $R_2 = 1$; $R_3 = 0$); S_2 : ($R_1 = 2$; $R_2 = 0$; $R_3 = 4$). Die Preise der Substanzen pro kg betragen: S_1 = 50 Cent; S_2 = 2 Euro. Geben Sie die kostenminimale Mischung an !

06 : Lösen Sie das nachfolgende lineare Optimierungsproblem grafisch: Maximieren von:

$$\left\{ G(x_1;x_2) = 12x_1 + 15x_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} \wedge x_1;x_2 \ge 0 \right\} \; !$$

07 : Im Lotto „6 aus 49“ wird die Wahrscheinlichkeit für: 3, ...,6 Richtige mit der hypergeometrischen Verteilung berechnet. Geben Sie für: 3, ...,6 Richtige die Wahrscheinlichkeiten an mit:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}; mit : k \le M \wedge n-k \le N-M \; !$$

08 : Die folgenden Begriffe: „(Absolutskala; Anzahl der Kinder; Beruf; Dichotomes Merkmal; Diskretes Merkmal; Geschlecht; Güteklasse; Häufbares Merkmal; Jährliche Fahrleistung in km; Nationalität; Nominalskaliertes Merkmal; Ordinalskaliertes Merkmal; Stetiges Merkmal; Stückzahl; Tagesmenge an gezapftem Treibstoff; Verhältnisskaliertes Merkmal)“ seien Ihnen als Alltagsausdrücke oder als statistische Kategorien gegeben: Ordnen Sie den gegebenen statistischen Kategorien die zugehörigen gegebenen Alltagsausdrücke zu!

09 : Geben Sie: P (1 < X $\leq$ 4) mit der gegebenen Dichtefunktion: $f_X(x) = \begin{cases} 0{,}08x & \text{für}: 0 < x < 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ an!

10 : Bei Qualitätsregelkarten werden Bezeichnungen gewissen Prüfkriterien zugeordnet. Führen Sie diese Zuordnungen für die nachfolgenden alphabetisch geordneten Begriffe durch:
(kombinierte Karte (z. B. x – s – Karte); Kumulierte Summen z. B. von Mittelwerten; KUSUM – Karte; Median – Karte; p – Karte; r – Karte; s – Karte; Stichproben – Einzelwerte; Stichproben – Fehleranteil; Stichproben - Fehleranzahl; Stichproben – Gesamtfehleranzahl; Stichprobenmedian; Stichprobenmittel; Stichprobenmittel und – streuung; Stichproben – Spannweite; Stichproben – Standardabweichung; u – Karte; Urwertkarte; x – Karte; Mittelwert – Karte **)** !

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/02/03/04/05/06/07/08/09/10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer Wildau, den 14.08.2002

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

WFG – 00 – Klausur Nr. 3 , Wintersemester 2001/02, 22. 06. 2002, Seminarraum 1020, Haus 1, 15 – 16.30 Uhr

Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

01 : Lösen Sie die „Kapitalverzehrsformel“: $0=K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ nach der Laufzeit: n auf!

Ti: S. 120: Durch Umformen, ausmultiplizieren, ausklammern und logarithmieren folgt aus: $0 = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$:

$0 = K_0 \cdot q^n \cdot (q-1) - R \cdot (q^n - 1) \Rightarrow 0 = q^n \cdot [K_0 \cdot (q-1) - R] + R \Rightarrow q^n = \frac{R}{R - K_0 \cdot (q-1)}$. Die Logarithmierung

ergibt die Laufzeit: $n = \frac{\ln\left[\frac{R}{R-K_0 \cdot (q-1)}\right]}{\ln q} = \frac{\ln R - \ln[R - K_0 \cdot (q-1)]}{\ln q}$

02 : Berechnen Sie : **X** aus: **A * X = E** mit: $\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$! Welche mathematische Bedingung ist zwingend ?

L.: 4.87: Es gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x & y \\ z & t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{E}; \Leftrightarrow \begin{matrix} ax + & bz & = 1 \\ cx + & dz & = 0 \\ ay + & bt & = 0 \\ cy + & dt & = 1 \end{matrix}; \; mit: x, y, z, t = ?$

Daraus folgt als Lösung dieser beiden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{matrix} ax + bz & = 1 \\ cx + dz & = 0 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} ay + bt & = 0 \\ cy + dt & = 1 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{Bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Bmatrix} \Rightarrow ad - bc \neq 0 \; ist \; zwingend \; !$$

03 : Für 10 Jahre werden 2.000 Euro mit 6 % Zinsfuß festgelegt. Wie groß ist die Kapitalzunahme bei einfacher Verzinsung und wie groß bei stetiger Verzinsung (hier nur den Zahlenausdruck angeben) ?

S.: S.46; 1.a; 1.c + 124): 1. Die Kapitalzunahme = Zinsen betragen bei einfacher Verzinsung:

$Z = 2000 \cdot \frac{6}{100} \cdot 10 = 1200 \; Euro$; 1. Die Kapitalzunahme = Zinsen betragen bei stetiger Verzinsung:

$$Z = K_n - 2000 = 2000 \cdot e^{0,6} - 2000 = 3644{,}24 - 2000 = 1644{,}24 \; Euro .$$

04 : Eine Schuld von: 500,000 US$ ist inklusive Zinsen (mit: i = 8 % p. a.) innerhalb von 5 Jahren zurückzuzahlen. Stellen Sie den vollständigen Tilgungsplan auf, wenn die Tilgung in einem einzigen Betrag am Ende des 5.ten Jahres erfolgen soll, die Zinszahlungen jedoch jährlich getätigt werden!

T.: S. 63 & 204, modifiziert: Der Tilgungsplan in US$ sieht unter den gegebenen Konditionen wie folgt aus:

Periode t	**Restschuld K_{t-1}** (Beginn t)	**Zinsen Z_t** (Ende t)	**Tilgung T_t** (Ende t)	**Annuität A_t** (Ende t)
1	500,000.00	40,000.00	0.00	40,000.00
2	500,000.00	40,000.00	0.00	40,000.00
3	500,000.00	40,000.00	0.00	40,000.00
4	500,000.00	40,000.00	0.00	40,000.00
5	500,000.00	40,000.00	500,000.00	540,000.00

05 : Eine Mischung: M wird aus zwei Substanzen: S1; S2 , bestehend aus drei Rohstoffen: R1; R2; R3 hergestellt. In M hat die Mindestmenge der: R_k (i = 1,...,3): 18 Gramm (g), und: 2 g bzw.: 3 g zu betragen. Folgende Mengen Rohstoffe: R_k in g pro Kilogramm (kg) sind in den Substanzen enthalten: S_1 : ($R_1 = 3$; $R_2 = 1$; $R_3 = 0$); S_2 : ($R_1 = 2$; $R_2 = 0$; $R_3 = 4$). Die Preise der Substanzen pro kg betragen: S_1 = 50 Cent; S_2 = 2 Euro. Geben Sie die kostenminimale Mischung an !

Ha.: S.10 + S.57: Es gilt: $z(x_1, x_2)$=minimal = 0,5 x_1 + 2 x_2 ; mit der Nichtnegativitätsbedingung: $x_1, x_2 \geq 0$; sowie den weiteren Nebenbedingungen: $3x_1 + 2x_2 \geq 18$; $x_1 \geq 2$; $4x_2 \geq 12$. Die Lösung ist grafisch (leicht) und rechnerisch zu finden mit: $x_1 = 4; x_2 = 3 \Rightarrow z(x_1; x_2) = 8$ Geldeinheiten.

06 : Lösen Sie das nachfolgende lineare Optimierungsproblem grafisch: Maximieren von:

$$\left\{ G(x_1;x_2) = 12x_1 + 15x_2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} \wedge x_1;x_2 \ge 0 \right\} \; !$$

S.: S. 83; 2 + 165: $x_1 = 80$; $x_2 = 240; \wedge G(80;240) = 4560$

07 : Im Lotto „6 aus 49“ wird die Wahrscheinlichkeit für: 3, ...,6 Richtige mit der hypergeometrischen Verteilung berechnet. Geben Sie für: 3, ...,6 Richtige die Wahrscheinlichkeiten an mit:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}; mit: k \le M \wedge n - k \le N - M \; !$$

SG: S.87: $P(3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}}; P(4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}}; P(5) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{49-6}{6-5}}{\binom{49}{6}}; P(3) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{49-6}{6-6}}{\binom{49}{6}};$

08 : Die folgenden Begriffe: „(Absolutskala; Anzahl der Kinder; Beruf; Dichotomes Merkmal; Diskretes Merkmal; Geschlecht; Güteklasse; Häufbares Merkmal; Jährliche Fahrleistung in km; Nationalität; Nominalskaliertes Merkmal; Ordinalskaliertes Merkmal; Stetiges Merkmal; Stückzahl; Tagesmenge an gezapftem Treibstoff; Verhältnisskaliertes Merkmal)“ seien Ihnen als Alltagsausdrücke oder als statistische Kategorien gegeben: Ordnen Sie den gegebenen statistischen Kategorien die zugehörigen gegebenen Alltagsausdrücke zu!

E1: S. 13 ff.: Die Reihenfolge lautet im Folgenden: **Statistische Kategorie** := Alltagsausdruck: **„(Absolutskala :=** Stückzahl; **Dichotomes Merkmal :=** Geschlecht; **Diskretes Merkmal:=** Anzahl der Kinder; **Häufbares Merkmal :=** Beruf; **Nominalskaliertes Merkmal :=** Nationalität; **Ordinalskaliertes Merkmal :=** Güteklasse; **Stetiges Merkmal :=** Tagesmenge an gezapften Treibstoff; **Verhältnisskaliertes Merkmal**:= Jährliche Fahrleistung in km)“.

09 : Geben Sie: P (1 < X ≤ 4) mit der gegebenen Dichtefunktion: $f_X(x) = \begin{cases} 0{,}08x & für: 0 < x < 5 \\ 0 & sonst \end{cases}$ an!

SG: S.53: $\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} \le 4) = \int_{x=1}^{4} 0{,}08x\,dx = 0{,}04 \cdot x^2 \Big|_1^4 = 0{,}04 \cdot (16-1) = 0{,}6$

10 : Bei Qualitätsregelkarten werden Bezeichnungen gewissen Prüfkriterien zugeordnet. Führen Sie diese Zuordnungen für die nachfolgenden alphabetisch geordneten Begriffe durch: **(** kombinierte Karte (z. B. x – s – Karte); Kumulierte Summen z. B. von Mittelwerten; KUSUM – Karte; Median – Karte; p – Karte; r – Karte; s – Karte; Stichproben – Einzelwerte; Stichproben – Fehleranteil; Stichproben - Fehleranzahl; Stichproben – Gesamtfehleranzahl; Stichprobenmedian; Stichprobenmittel; Stichprobenmittel und – streuung; Stichproben – Spannweite; Stichproben – Standardabweichung; u – Karte; Urwertkarte; x – Karte; Mittelwert – Karte **)** !

E2, S. 67, Tabelle 2.4: In alphabetischer Reihenfolge gilt stets: **Bezeichnung** := Prüfkriterium für: **kombinierte Karte (z. B. x – s – Karte):=** Stichprobenmittel und – streuung; **KUSUM – Karte**:= Kumulierte Summen z. B. von Mittelwerten; **Median – Karte**:= Stichprobenmedian; **Mittelwert – Karte** := Stichprobenmittel; **p – Karte**:= Stichproben – Fehleranteil; **r – Karte**:= Stichproben – Spannweite; **s – Karte**:= Stichproben – Standardabweichung; **u – Karte**:= Stichproben – Gesamtfehleranzahl; **Urwertkarte:=** Stichproben – Einzelwerte; **x – Karte**:= Stichproben - Fehleranzahl**.**

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

E1: Eckstein, P. P.: Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. Auflage, 1998
E2: Eckstein, P. P.: Induktive Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 1. Auflage, 1998
H: Hartl, F.: Finanzmathematik, Fernstudienagentur, 1. Auflage, 1997
Ha: Hartl, F.: Operations Research, Fernstudienagentur, 1. Auflage, 1997
L: Lipschutz, S.: Linear Algebra, McGraw-Hill, 1989
S: Schwarze, J.: Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, nwb Verlag, 2002
SG: Schwarze, J.: Grundlagen der Statistik II, 7. Auflage, nwb Verlag, 2002
T: Tietze; Übungsbuch zur Finanzmathematik**;** Vieweg Verlag
Ti: Tietze; Einführung in die Finanzmathematik**;** Vieweg Verlag; 2001