Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

WR - Mathematik – Klausur 1 im Wintersemester 2001/2 am 14. 01. 2002, Haus 3, Großer Hörsaal, 8 – 9.30 Uhr

Allgemeine Hinweise: 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht schnellstmöglich über das Prüfungsamt; 9. Wiederholungstermine werden ausgehängt.

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

Geben Sie an, ob Ihre Hausaufgaben gewertet werden sollen:

Die Aufgaben und Ihre Lösungen:

A.1: Berechnen Sie mittels einer Wahrheitstafel den oder die Wahrheitswert(e) von: $\left[A \wedge (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B\right]$!

A.2: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{i=1}^{i=n} (2i-1) = n^2$!

B.3: Gegeben sei die Menge: $\mathbf{A} = \{1, \{2,3\}, 4\}$. Welche der folgenden vier Aussagen sind falsch ?

$1.:\{2,3\}\subset \mathbf{A};\ 2.:\{\{2,3\}\}\subset \mathbf{A};\ 3.:\{2,3\}\in \mathbf{A};\ 4.:\emptyset \subset \mathbf{A}$.

B.4: Es werden 55 Frauen und 45 Männer befragt, wovon 65 dieser Personen rauchen, davon 35 Frauen. Wie viele Männer sind Nichtraucher? Lösung über das Euler – Venn – Diagramm **und** mittels Mengenalgebra.

C.5: Sie leihen sich bei einer Bank: DM 10.000,00. Zurück zu zahlen haben Sie nach einem Jahr: DM 6.000,00 und nach einem weiteren Jahr: DM 7.000,00. Welchem positiven effektiven Zinssatz entspricht dieser Kreditvorgang ? (Gegeben: $\sqrt{79} \approx 8{,}88$)

C.6: DM 500.000,00 ist innerhalb von 5 Jahren inklusive der Zinsen zurückzuzahlen mit: i = 8 % p. a.. Stellen Sie einen Tilgungsplan auf, wenn die Tilgung in einem Betrag am Ende des 5.ten Jahres, die Zinszahlungen jährlich erfolgen sollen!

D.7: Gegeben sei: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; der Vektor: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ sowie: $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. Schreiben Sie das Gleichungssystem hin, bestimmen Sie: $Rg\ \mathbf{A}\ \ und:Rg\ \mathbf{A}|\mathbf{b}$ und lösen Sie das System nach einer Methode Ihrer Wahl.

D.8: Gegeben sei eine Gewinnfunktion: $G(x_1,x_2)=x_1+2\cdot x_2$ mit den folgenden Nebenbedingungen: $x_1,x_2\geq 0$, sowie: $x_1\leq 100\wedge x_2\leq 150$. Geben Sie die optimale Lösung an und stellen Sie das primäre Simplex – Tableau auf.

E.9: Zeichnen Sie mittels einer Wertetabelle den Graphen der Funktion: $f(x)=|x-1|$ im Intervall: $[-1,+2]$!

E.10: Gegeben sei: $f(x) = x^2 - 2$. Berechnen Sie eine Nullstelle (Tangentenverfahren) mit einer Näherung, ausgehend vom Wert: $x_2 = 2$!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Ihre Note für die Bearbeitung der Hausaufgaben lautet:

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen (A/B/C/D/E); Bestanden: ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: (01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10); Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt: Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer

Wildau, den 14.08.2002

Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

Die Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

A.1: Berechnen Sie mittels einer Wahrheitstafel den oder die Wahrheitswert(e) von: $\left[A \wedge \left(\neg B \rightarrow \neg A\right) \rightarrow B\right]$!

S: S.46/7:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$A \wedge \left(\neg B \rightarrow \neg A\right)$	$\left[A \wedge \left(\neg B \rightarrow \neg A\right)\right] \rightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w

Die Aussage ist stets wahr (Prinzip des indirekten Beweises) .

A.2: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{i=1}^{i=n} \left(2i - 1\right) = n^2$!

KK: S.21; 1.c;/24: Die Aussage $\sum_{i=1}^{i=n} \left(2i - 1\right) = n^2$ ist wahr für: i = n = 1: (2-1)=1^2; sie sei wahr für ein: n = k:

1+2+3+5+...+(2k-1) = k^2 ; zu dieser wahren Aussage wird das nächstfolgende Glied := (2k+1) auf beiden Seiten der Gleichung addiert, und es ergibt sich: 1+2+3+5+...+(2k-1)+ (2k+1) = k^2 +(2k+1). Der Schluß von: n auf: n+1 sollte für die rechte Seite ergeben: $(k+1)^2$; der Ausdruck: k^2 +(2k+1) ist aber gleich $(k+1)^2$,q.e.d. (binomische Formel).

B.3: Gegeben sei die Menge: $\mathbf{A} = \{1, \{2,3\}, 4\}$. Welche der folgenden vier Aussagen sind falsch ?

$$1.: \{2,3\} \subset \mathbf{A};\ \ 2.: \{\{2,3\}\} \subset \mathbf{A};\ \ 3.: \{2,3\} \in \mathbf{A};\ 4.: \varnothing \subset \mathbf{A}\ .$$

O: S.63/4; 2.8; 354: Aussage 1.) ist falsch: $\{2,3\} \in \mathbf{A}$!

B.4: Es werden 55 Frauen und 45 Männer befragt: 65 dieser Personen rauchen, davon 35 Frauen. Wie viele Männer sind Nichtraucher? Lösung über das Euler – Venn – Diagramm und mittels Mengenalgebra.

BO: S.11;200: x = 15;

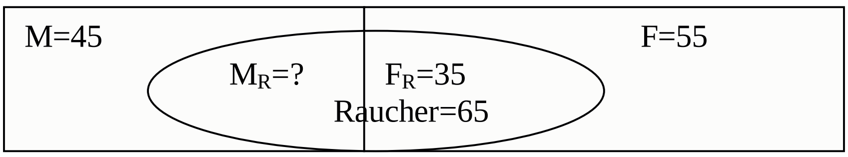


Abb.:1 : Die Abbildung zeigt das Euler - Venn – Diagramm mit **M**=45 Männern; **F**=55 Frauen; **Raucher**=65; $\mathbf{M_R}$= rauchende Männer sowie**:** $\mathbf{F_R}$= rauchende Frauen =35 Personen.

Die Mengenalgebra liefert das folgende Ergebnis: $M\left(Nichtraucher\right) = M - \left(Raucher - F_R\right) = 45 - \left(65 - 35\right) = 15$

C.5: Sie leihen sich bei einer Bank: DM 10.000,00. Zurückzuzahlen haben Sie nach einem Jahr: DM 6.000,00 und nach einem weiteren Jahr: DM 7.000,00. Welchem positiven effektiven Zinssatz entspricht dieser Kreditvorgang ? (Gegeben: $\sqrt{79} \approx 8{,}88$)

H: Nr. 33 & **T:** S. 26 & 172: Gesucht ist der effektive Zinssatz zu einem beliebigen Stichtag, z. B. dem letzten Rückzahlungstag, damit lautet die Äquivalenzgleichung:

$$10000 \cdot q^2 = 6000 \cdot q + 7000 \Rightarrow q^2 - 0{,}6 \cdot q - 0{,}7 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 0{,}3 \pm \sqrt{0{,}09 + 0{,}7} = 0{,}3 \pm 0{,}888 = 1{,}188$$

Damit der effektive Zinssatz = 18,88 %.

C.6: DM 500.000,00 ist innerhalb von 5 Jahren inklusive der Zinsen zurückzuzahlen mit: i = 8 % p. a.. Stellen Sie einen Tilgungsplan auf, wenn die Tilgung in einem Betrag am Ende des 5.ten Jahres, die Zinszahlungen jährlich erfolgen sollen!

T: S. 63 & 204: Der Tilgungsplan sieht unter den gegebenen Konditionen wie folgt aus:

Periode t	Restschuld K_{t-1} (Beginn t)	Zinsen Z_t (Ende t)	Tilgung T_t (Ende t)	Annuität A_t (Ende t)
1	500.000,00	40.000,00	0,00	40.000,00
2	500.000,00	40.000,00	0,00	40.000,00
3	500.000,00	40.000,00	0,00	40.000,00
4	500.000,00	40.000,00	0,00	40.000,00
5	500.000,00	40.000,00	500.000,00	540.000,00

D.7: Gegeben sei: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; der Vektor: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sowie: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie das Gleichungssystem hin, bestimmen Sie: $Rg\ \mathbf{A}\ \ und : Rg\ \mathbf{A}|\mathbf{b}$ und lösen Sie das System nach einer Methode Ihrer Wahl.

V: Das lineare Gleichungssystem lautet: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 + x_2 & = 2 \end{matrix} \right\}$; der Rang von **A** ist:

$$Rg\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\mathbf{A} = 2;\ Rg\mathbf{A}|\mathbf{b} := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Rg\ \mathbf{A}|\mathbf{b} = 2 = Rg\ \mathbf{A}.$$

Das Gleichungssystem ist lösbar.

a) Die Lösung (Gauß'scher Algorithmus) lautet: $\left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 + x_2 & = 2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 & = 1 \\ 2 \cdot x_2 & = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = \frac{3}{2}; x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_1 + \frac{3}{2} = 1 \end{matrix}$

b) daraus die Pivotisierung: $\left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 & = 1 \\ 2 \cdot x_2 & = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + & x_2 & = 1 \\ & x_2 & = \frac{3}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 & & = -\frac{1}{2} \\ & x_2 & = \frac{3}{2} \end{matrix}$

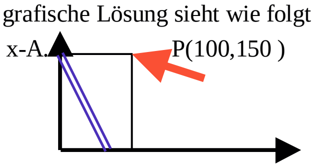
c) Mittels inverser Matrix: $\mathbf{A}^{-1}$: $\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} = \mathbf{A}^{-1}$. Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

D.8: Gegeben sei die Gewinnfunktion: $G(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$ mit den Nebenbedingungen: $x_1, x_2 \geq 0$, sowie: $x_1 \leq 100 \wedge x_2 \leq 150$. Geben Sie die optimale Lösung an und stellen Sie das primäre Simplex – Tableau auf.

V: Die optimale Lösung erhält man durch Einsetzen der zweiten und dritten Nebenbedingung in die Gewinnfunktion: $G(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2 = 100 + 2 \cdot 150 = 400$ (z. B. Geldeinheiten). Die grafische Lösung sieht wie folgt aus:

(Die blaue Gerade stellt die Gewinnfunktion dar, die orthogonal verschoben wird.)



Das primäre Simplex Tableau lautet:

x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
1	0	1	0	100
0	1	0	1	150
−1	−2	0	0	0

Durch Rechnung folgt, da fast

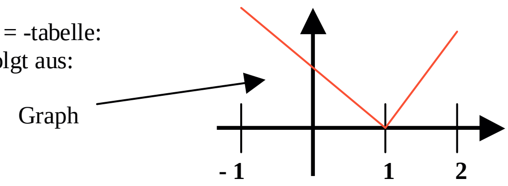
pivotisiert ist:

$$\begin{array}{cccc||c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc||c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 100+2\cdot 150=400 \end{array}$$

Wiederum: $G(x_1,x_2)=x_1+2\cdot x_2=100+2\cdot 150=400$ in (Geldeinheiten).

E.9: Zeichnen Sie mittels einer Wertetabelle den Graphen der Funktion: $f(x)=|x-1|$ im Intervall: $[-1,+2]$!

C: 5.5: Die Wertetabelle ergibt für die folgenden Wertepaare = -tabelle:
(-1;+2);(0;+1):(+1;0);(+2;+1). Damit sieht der Graph wie folgt aus:



E.10: Gegeben sei: $f(x)=x^2-2$. Berechnen Sie eine Nullstelle (Tangentenverfahren) mit einer Näherung, ausgehend vom Wert: $x_2=2$!

VA: Beim Tangentenverfahren gilt für die Näherung: $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Die Ableitung von: $f(x)=x^2-2$ lautet:

$f'(x)=2\cdot x$. Damit folgt nach kurzer Rechnung aus: $\begin{array}{ccc} x_1 & f(x_1) & f'(x_1) \\ +2 & +2 & +4 \end{array} \Rightarrow x_2=+2-\frac{2}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$

Die Kürzel bedeuten Literaturhinweise und Quellen der Klausuraufgaben wie folgt:

BO: Bosch: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler; 13. Auflage , Oldenbourg;

C: Mendelson: 3000 Solved Problems in Calculus, McGraw-Hill, N. Y., 1988

H: Hausaufgabe Nr. 33

KK: Kallischnigg et. al.: Mathematik für Volks- und Betriebswirte; 2. Auflage, Oldenbourg;

O: Ohse: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler 1, Analysis, 4. Auflage;

S: Schwarze: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Bd. 1, Grundlagen, 11. Auflage;

T: Tietze; Übungsbuch zur Finanzmathematik**;** S. 26 & 172;

V: Vorlesungsähnlich vom 18. 12. 2001

VA: Vorlesungsbeispiel vom 09. 01. 2002