

**WR – Klausur Nr. 4 zum Wintersemester 2001/02 am 16. 12. 2002, Haus 1, Raum 1116, 14 – 16 Uhr**  
Klaus R. F. Bätjer, Dr., Prof., TFH Wildau, FB IW / WIW, Haus 1, Raum 1205, Friedrich Engels Straße 63

**Allgemeine Hinweise:** 1. Stellen Sie sicher, daß die Prüfung anerkannt wird; 2. Weisen Sie sich aus; 3. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten; 4. Erlaubt sind nur Papier und Schreibwerkzeug; 5. Korrigiert werden auch mit Ihrem Namen versehene Blätter, jedoch mit einem Punktabzug; 6. Die Klausur wird bestanden, indem aus jeder der fünf Gruppen eine Aufgabe korrekt gelöst wird und mindestens 50 Punkte erreicht werden; 7. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte. 8. Die Bekanntgabe der Note geschieht nur über das Prüfungsamt; 9. **Dies ist Ihre letzte mögliche Prüfung in Mathematik.**

Geben Sie **Ihren Namen** und die Matrikelnummer an:

**Die Aufgaben und Ihre Lösungen:**

**A. 01:** Vereinfachen Sie den Ausdruck:  $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$  !

**A. 02:** Beweisen Sie:  $\sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) = n^2$  !

**B. 03:** Es werde eine Multiple - Choise – Aufgabe mit 4 möglichen Antworten gegeben und die fünfte Antwort: „Keine Antwort ist richtig“. Mehrfache Kreuze seien erlaubt. Wie viele sinnvolle Antwortmöglichkeiten gibt es ?

**B. 04:** Gegeben seien:  $A = \{1,2\}$  und:  $B = \{x, y, z\}$  . Geben Sie beide Potenzmengen an!

**C. 05:** 500,000.00 US\$ seien innerhalb von 5 Jahren mit Zinsen zurückzuzahlen (  $i = 8 \% \text{ p. a.}$  ). Stellen Sie den Tilgungsplan auf, wenn die Tilgung in einem Betrag am Ende des 5.ten Jahres, die Zinszahlungen jährlich erfolgen sollen!

**C. 06:** Lösen Sie die Kapitalverzehrformel:  $0 = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$  nach der Laufzeit auf!

**D. 07:** Gegeben sei die Gewinnfunktion:  $G(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$  mit den Nebenbedingungen:  $x_1, x_2 \geq 0$ , sowie:  $x_1 \leq 100 \wedge x_2 \leq 150$ . Geben Sie die optimale Lösung an und stellen Sie das primäre Simplex – Tableau auf.

**D. 08:** : Schreiben Sie:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 24 \\ x_2 + 2x_3 & = & 11 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 28 \end{array}$$

als Matrixform und berechnen Sie:  $\mathbf{A}^{-1}$  !

**E. 09:** Untersuchen Sie:  $f(x) = e^{-2x} + 2x$  auf Extremwerte und Wendepunkte und geben Sie diese an!

**E. 10:** Integrieren Sie:  $f(x) = 0,5 \cdot (e^x - e^{-x})$  !

**Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!**

Das Ergebnis der Klausur lautet: Bearbeitete Aufgabengruppen ( A/B /C /D /E )

Bestanden: Ja / Nein

Richtig bearbeitete Aufgaben: ( 01/ 02/ 03/ 04/ 05/ 06/ 07/ 08/ 09/ 10 )

Bestanden: Ja / Nein

Die von 100 möglichen Punkten erreichte Punktzahl beträgt:

Damit lautet Ihre Klausurnote:

Klaus R. F. Bätjer

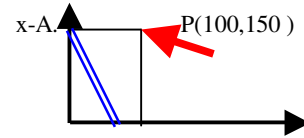
Wildau, den 23.03.2003

WR – Klausur Nr. 4 zum Wintersemester 2001/02 am 16. 12. 2002, Haus 1, Raum 1116, 14 – 16 Uhr  
Die Aufgaben mit den Lösungen und der Herkunft der Lösungen:

| $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ <p><b>A. 01:</b> Vereinfachen Sie den Ausdruck: <math>\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}</math> !</p> $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{x \cdot y}}{\frac{x + y}{x \cdot y}} = \frac{x^2 - y^2}{x \cdot y} \cdot \frac{x \cdot y}{x + y} = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y.$   |                                    |                                    |                           |                            |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
|---|------------------------------------|------------------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|------------|-----------|------|-----------|---|------------|-----------|------|-----------|---|------------|-----------|------|-----------|---|------------|-----------|------|-----------|---|------------|-----------|------------|------------|
| <p><b>A. 02:</b> Beweisen Sie: <math>\sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) = n^2</math> !</p> <p>Die Aussage <math>\sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) = n^2</math> ist wahr für: <math>i = n = 1: (2 \cdot 1 - 1) = 1^2</math>; sie sei wahr für ein: <math>n = k</math>, d. h.:</p> <p><math>1 + 2 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2</math>. Zu dieser wahren Aussage wird das nächstfolgende Glied (<math>i = k + 1</math>) := <math>(2k + 1)</math> auf beiden Seiten der Gleichung addiert, und es ergibt sich: <math>1 + 2 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)</math>. Der Schluß von: <math>n</math> auf: <math>n + 1</math> sollte die rechte Seite ergeben: <math>(k + 1)^2</math>; der Ausdruck: <math>k^2 + (2k + 1)</math> ist aber gleich: <math>(k + 1)^2</math>, q.e.d. (= binomische Formel für: <math>n = 2</math>).</p>   |                                    |                                    |                           |                            |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| <p><b>B. 03:</b> Es werde eine Multiple - Choice – Aufgabe mit 4 möglichen Antworten gegeben und die fünfte Antwort: „Keine Antwort ist richtig“. Mehrfache Kreuze seien erlaubt. Wie viele sinnvolle Antwortmöglichkeiten gibt es ?</p> <p style="text-align: center;">Es gibt: <math>2^4 = 16</math> sinnvolle Antwortmöglichkeiten.</p>  |                                    |                                    |                           |                            |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| <p><b>B. 04:</b> Gegeben seien: <math>A = \{1, 2\}</math> und: <math>B = \{x, y, z\}</math>. Geben Sie beide Potenzmengen an!</p> <p style="text-align: center;"><math>P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}</math>; <math>P(B) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}, \emptyset\}</math></p>   |                                    |                                    |                           |                            |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| <p><b>C. 05:</b> 500.000,00 US\$ seien innerhalb von 5 Jahren mit Zinsen zurückzuzahlen (<math>i = 8\%</math> p. a.). Stellen Sie den Tilgungsplan auf, wenn die Tilgung in einem Betrag am Ende des 5.ten Jahres, die Zinszahlungen jährlich erfolgen sollen!</p> <p style="text-align: center;">Der Tilgungsplan sieht unter den gegebenen Bedingungen wie folgt aus:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;">Periode t</th> <th style="border: none;">Restschuld <math>K_{t-1}</math><br/>(Beginn t)</th> <th style="border: none;">Zinsen <math>Z_t</math><br/>(Ende t)</th> <th style="border: none;">Tilgung <math>T_t</math><br/>(Ende t)</th> <th style="border: none;">Annuität <math>A_t</math><br/>(Ende t)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">500.000,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> <td style="border: none;">0,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">500.000,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> <td style="border: none;">0,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">3</td> <td style="border: none;">500.000,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> <td style="border: none;">0,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">4</td> <td style="border: none;">500.000,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> <td style="border: none;">0,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">5</td> <td style="border: none;">500.000,00</td> <td style="border: none;">40.000,00</td> <td style="border: none;">500.000,00</td> <td style="border: none;">540.000,00</td> </tr> </tbody> </table> | Periode t                          | Restschuld $K_{t-1}$<br>(Beginn t) | Zinsen $Z_t$<br>(Ende t)  | Tilgung $T_t$<br>(Ende t)  | Annuität $A_t$<br>(Ende t) | 1 | 500.000,00 | 40.000,00 | 0,00 | 40.000,00 | 2 | 500.000,00 | 40.000,00 | 0,00 | 40.000,00 | 3 | 500.000,00 | 40.000,00 | 0,00 | 40.000,00 | 4 | 500.000,00 | 40.000,00 | 0,00 | 40.000,00 | 5 | 500.000,00 | 40.000,00 | 500.000,00 | 540.000,00 |
| Periode t   | Restschuld $K_{t-1}$<br>(Beginn t) | Zinsen $Z_t$<br>(Ende t)           | Tilgung $T_t$<br>(Ende t) | Annuität $A_t$<br>(Ende t) |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| 1   | 500.000,00                         | 40.000,00                          | 0,00                      | 40.000,00                  |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| 2   | 500.000,00                         | 40.000,00                          | 0,00                      | 40.000,00                  |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| 3   | 500.000,00                         | 40.000,00                          | 0,00                      | 40.000,00                  |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| 4   | 500.000,00                         | 40.000,00                          | 0,00                      | 40.000,00                  |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| 5   | 500.000,00                         | 40.000,00                          | 500.000,00                | 540.000,00                 |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |
| <p><b>C. 06:</b> Lösen Sie die Kapitalverzehrformel: <math>0 = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}</math> nach der Laufzeit auf!</p> <p style="text-align: center;">Durch Umformen, ausmultiplizieren, ausklammern und logarithmieren folgt aus::</p> $0 = K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1) - R \cdot (q^n - 1) \Rightarrow 0 = q^n \cdot [K_0 \cdot (q - 1) - R] + R \Rightarrow q^n = \frac{R}{R - K_0 \cdot (q - 1)}$ <p style="text-align: center;">Die Logarithmierung ergibt die Laufzeit: <math>n = \frac{\ln \left[ \frac{R}{R - K_0 \cdot (q - 1)} \right]}{\ln q} = \frac{\ln R - \ln [R - K_0 \cdot (q - 1)]}{\ln q}</math></p>   |                                    |                                    |                           |                            |                            |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |      |           |   |            |           |            |            |

**D. 07:** Gegeben sei die Gewinnfunktion:  $G(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$  mit den Nebenbedingungen:  $x_1, x_2 \geq 0$ , sowie:  $x_1 \leq 100 \wedge x_2 \leq 150$ . Geben Sie die optimale Lösung an und stellen Sie das primäre Simplex – Tableau auf.

**V:** Die optimale Lösung erhält man durch Einsetzen der zweiten und dritten Nebenbedingung in die Gewinnfunktion:  $G(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2 = 100 + 2 \cdot 150 = 400$  (z. B. Geldeinheiten). Die grafische Lösung sieht wie folgt aus: (Die blaue Gerade stellt die Gewinnfunktion dar, die orthogonal verschoben wird.)



Das primäre Simplex Tableau lautet:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b   |
|-------|-------|-------|-------|-----|
| 1     | 0     | 1     | 0     | 100 |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 150 |
| -1    | -2    | 0     | 0     | 0   |

Durch Rechnung folgt, da fast pivotisiert ist:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b                         |
|-------|-------|-------|-------|---------------------------|
| 1     | 0     | 1     | 0     | 100                       |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 150                       |
| 0     | 0     | 1     | 2     | $100 + 2 \cdot 150 = 400$ |

Wiederum:  $G(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2 = 100 + 2 \cdot 150 = 400$  in (Geldeinheiten).

**D. 08:** Schreiben Sie:  $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 24$   
 $x_2 + 2x_3 = 11$  als Matrixform und berechnen Sie:  $A^{-1}$ !  
 $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 28$

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} \text{ mit dem Gau\ss - Jordan Algorithmus:}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( E \mid A^{-1} \right)$$

**E. 09:** Untersuchen Sie:  $f(x) = e^{-2x} + 2x$  auf Extremwerte und Wendepunkte und geben Sie diese an!

$$f(x) = e^{-2x} + 2x \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} + 2 \wedge f''(x) = +4e^{-2x};$$

$$1. \text{ Daraus ergeben sich die Extremwerte aus: } 0 = f'(x_E) = -2e^{-2x_E} + 2 \Rightarrow x_E = 0 \wedge E(0;1);$$

$$\text{mit: } f''(x_E) = +4e^{-2x_E} = f''(0) = +4e^{-2 \cdot 0} > 0 \Leftrightarrow E(0;1) \text{ ist ein Minimum.}$$

$$2. \text{ Daraus ergeben sich die Wendepunkte aus: } 0 = f''(x_W) = +4e^{-2x_W} \neq 0; \Leftrightarrow x_W = +\infty \Leftrightarrow \emptyset;$$

es gibt keine Wendepunkte.

**E. 10:** Integrieren Sie:  $f(x) = 0,5 \cdot (e^x - e^{-x})$ !

$$f(x) = 0,5 \cdot (e^x - e^{-x}) \Rightarrow F(x) = 0,5 \cdot \int (e^x - e^{-x}) dx = 0,5 \cdot (e^x + e^{-x}) + K$$

Alle Klausuraufgaben stammen den Klausuren Nr. 1 bis Nr. 3.