MP: RT00: Relativitätstheorie und Gravitation - Vorbemerkungen - Seite1 -

Elektrodynamik, Mechanik und Signalgeschwindigkeit.

Das 20. Jahrhundert hat zwei wesentliche Theorien = Gesetze hervorgebracht: die unvollendeten Quantentheorien und die beiden Relativitätstheorien Einsteins, die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein ist gleichfalls als Gravitationstheorie experimentell noch nicht abgeschlossen.

Aus diesen beiden Theoriegebilden ergeben sich die Entwicklungen und die Erkenntnisse dieses Jahrhunderts in der Astrophysik, den Computern und der Elektronik, der Kernphysik, den Standardmodellen, den Vereinheitlichungen, etc.

Die grundlegenden Ideen sind dabei:

- Alle physikalischen Gesetze müssen in allen beschreibenden Systemen, an allen Orten (Weltall) und zu allen Zeiten (Entwicklung des Universums!) gültig (gewesen) sein;

- Die gesamte Menge der Erhaltungssätze der Physik sind die Folge von Symmetrien (E. Nöther);

- Im Sinne einer Vereinheitlichung physikalischer Theorien ist weder die Quantentheorie noch die Gravitationstheorie = allgemeine Relativitätstheorie u. a. wegen der dabei auftretenden experimentellen und mathematischen Probleme verstanden noch vollendet;

- Abgeschlossen, aber auch unvollständig sind die beiden klassischen Theorien:

Mechanik = Newton & Co, incl. der Thermodynamik und die Elektrodynamik = Maxwell & Co, inkl. der Optik:

- Die Signalgeschwindigkeit der klassischen Mechanik ist mit v_S unendlich groß und die der Elektrodynamik mit

$$0.1: v_S = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \approx 300.000 \frac{km}{s} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \textit{die Lichtgeschwindigkeit des Vakuums.}$$

Damit ergibt sich die Frage, welche der beiden klassischen Theorien: „Mechanik“ oder „Elektrodynamik“ korrekt sein mag.

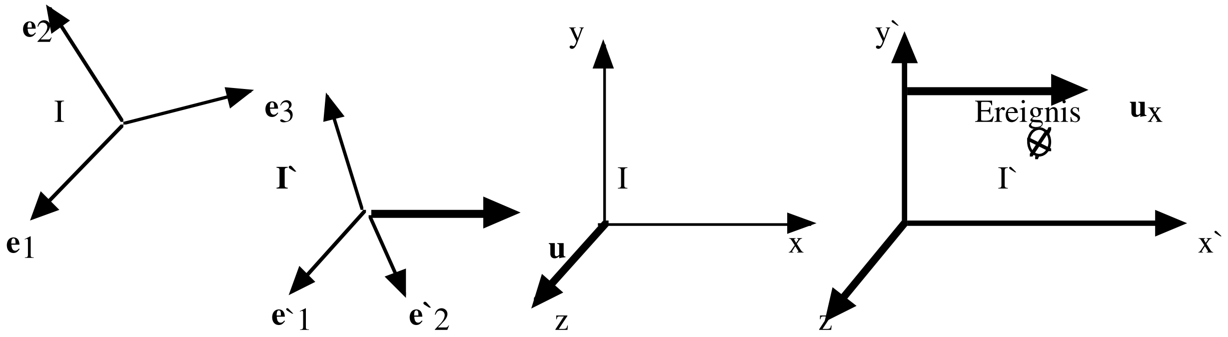
- Zwei Fälle lassen sich hinsichtlich der Beschreibung der Theorien = Gesetze der Physik unterscheiden:

1. Das System „1“ ist bezüglich des Systems „2“ in Ruhe, welches selbst gegenüber dem System „1“ die beliebige relative vektorielle Geschwindigkeit **u** haben möge:
diese Fragestellung führt zur speziellen Relativitätstheorie (es liegt klar zutage, daß die Bezeichnungen der Systeme mit „1“ und mit „2“ vertauschbar und damit willkürlich ist.);

2. Das System „1“ erlebt bezüglich des Systems „2“ Beschleunigungen bzw. Verzögerungen und damit Schwere: diese Fragestellung führt zur allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins und zum Verständnis der Gravitation.

Auch hier ist klar, daß die Bezeichnungen der Systeme willkürlich voraenommen werden können:
die bislang bekannten Formeln in der Mechanik zeigen mit der Masse stets nur eine **anziehende Kraft**, im Gegensatz zur Elektrodynamik, in der bei gleichnamigen Ladungen auch **abstoßende Kräfte** auftreten.

1.: Die klassische Sicht: Galilei - Transformation.



Ohne eine Verletzung der Allgemeinheit lassen sich die beiden linken allgemeinen Koordinatensystem I und I ` in die rechten, kartesischen Koordinatensysteme überführen, in dem die x - Achsen in die gleiche Richtung zeigen, in der sich auch das System I ` gegenüber dem System I bewegt.

Der Übergang vom System I in das System I ´ in der Beschreibung der klassischen Mechanik ist gegeben durch die **Galilei - Transformationen:**

Die Orte der Ereignisse in den Inertialsystemen I und I´werden überführt durch:

$$1.10: y' = y; \quad z' = z; \quad x' = x - u \cdot t; \quad t' = t. \; Sowie\ invers: y = y'; \quad z = z'; \quad x = x' + u \cdot t'; \quad t = t'.$$

Daraus folgen sogleich alle die bekannten **Gesetzmäßigkeiten von Newton & Co.**:

$$1.11: Geschwindigkeiten: \frac{dy'}{dt} = v_y{}'; \frac{dy}{dt'} = v_y; \frac{dz'}{dt} = v_z{}'; \frac{dz}{dt'} = v_z; \frac{dx'}{dt} = v_x{}' - u; \frac{dx}{dt'} = v_x + u; \frac{dt'}{dt} = \frac{dt}{dt'} = 1.$$

$$1.12: Beschleunigungen: \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{dv_y'}{dt} = a_y'; \frac{d^2y}{dt'^2} = \frac{dv_y}{dt} = a_y; \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{dv_z'}{dt} = a_z'; \frac{d^2z}{dt'^2} = \frac{dv_z}{dt} = a_z.$$

$$Und: \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx'}{dt} - u\right] = \frac{d^2x'}{dt^2} = a_x'; \frac{d^2x}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left[\frac{dx}{dt'} + u\right] = \frac{d^2x}{dt'^2} = a_x.$$

Ferner gelten alle Erhaltungssätze der klassischen Mechanik und der Impulssatz und für die Kraft **F**:

$$1.2: \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \mathbf{v})$$

Jedoch gelten die Gesetzmäßigkeiten der Rotation nicht, da in rotierenden Systemen die Beschleunigung **a** von Null verschieden ist und damit I` kein Inertialsystem gegenüber I ist.

Gelten die Gesetzmäßigkeiten der Galilei - Transformationen auch für die Elektrodynamik?

Experimentell wird in der Elektrodynamik festgestellt, daß ein Beobachter sowohl im Inertialsystem I wie im System I´ je einen Kugelblitz mißt mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum = c = 300.000 km/s, also gelten in den Systemen I ´ wie in I die folgenden Bedingungen für die Ausbreitung des Lichtblitzes auf einer Kugeloberfläche in Kugel- bzw. kartesischen Koordinaten:

$$I: r^2 = c^2 \cdot t^2 \propto x^2 + y^2 + z^2 - (c \cdot t)^2 = 0 \; oder \; x^2 + y^2 + z^2 + (i \cdot c \cdot t)^2 = 0$$

$$I': r'^2 = c^2 \cdot t'^2 \propto x'^2 + y'^2 + z'^2 - (c \cdot t')^2 = 0 \; oder \; x'^2 + y'^2 + z'^2 + (i \cdot c \cdot t')^2 = 0$$

Die Einführung der imaginären Konstanten i stammt von Minkowski und wird nach ihm benannt, es ist die vierdimensionale Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie.

Die Ausführung der Galilei - Transformation für den Kugelblitz (1.1) in I ergibt einen Widerspruch in dem System I´:

$$0=(x'+u\cdot t')^2+y'^2+z'^2-(c\cdot t')^2 \neq r'^2-(c\cdot t')^2=0$$

wie es sich als Ergebnis errechnen sollte.

Maxwellgleichungen und die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum:

$$1.4: \quad rot\,\mathbf{H}=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j} \quad div\,\mathbf{D}=\rho \quad rot\,\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad div\,\mathbf{B}=0: Maxwell-Gleichungen$$

Lorentzkraft und Materialgleichungen:

$$1.5: \quad Lorentzkraft: \mathbf{F}=e\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\ und\ die$$

$$1.6: \quad Material-Gleichungen: \mathbf{D}=\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}; \quad \mathbf{B}=\mu\cdot\mu_0\cdot\mathbf{H}; \quad \mathbf{j}=\sigma\cdot\mathbf{E}.$$

mit den folgenden (bereits bekannten) Bezeichnungen:

$\mathbf{B},\mathbf{E}$ = *magnetische, elektrische Feldstärke*; $\mathbf{D},\mathbf{H}$ = *elektrische, magnetische Erregung*;
$\mathbf{j}$ = *elektrische Stromdichte*; ρ = *elektrische Ladungsdichte*; $\varepsilon,\varepsilon_0$ = *Dielektrizitäts – und Influenzkonstante*;
μ,μ_0 = *Permeabilität, Induktitionskonstante*; e = *elektrische Ladung*; σ = *elektrische Leitfähigkeit.*
Skalares Potential = Φ *und* $\mathbf{A}$ = *Vektorpotential.*

Dann sind im Vakkum zwei Eichungen möglich, die Coulomb - Eichung und die Lorentz - Eichung:

$$1.6: \quad Coulomb-Eichung: div\,\mathbf{A}=0\ \ und\ Lorentz-Eichung: div\,\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$$

Die Ausbreitungsgleichungen elektromagnetischer Wellen im Vakuum lautet damit für das skalare Potential:

$$1.7: \quad \Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\cdot\ddot{\Phi}=0=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\ mit\ \Phi=\Phi(x,y,z,t)$$

Aus den Galilei - Transformationen (1.10) folgt weiter noch:

$$1=\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial x}\ und\ 0=\frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial z}=\frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial z}=\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial y}$$

daraus folgt der Reihe nach bzw. auf ähnliche Weise:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial x'};\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}\ und$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2},\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}$$

für die zeitlichen Ableitungen unter Verwendung der Kettenregel:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t'} = -v\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + \frac{\partial\Phi}{\partial t'} \quad und \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-v\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + \frac{\partial\Phi}{\partial t'}\right] = -2v\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\cdot\partial t'} + v^2\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}$$

Werden diese Ausdrücke in die Wellengleichung im Inertialsystem I eingesetzt, so ergibt sich für I ´:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2}\cdot\left[2v\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\cdot\partial t'} - v^2\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}\right] = 0 \neq \Delta'\Phi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} = 0$$

Sofort ergibt sich wieder die Frage, welche der beiden klassischen Theorien, Elektrodynamik oder Mechanik die korrekte Theorie ist.

Setzt man die Lichtgeschwindigkeit als Konstante in I und in I´ ein, so ergibt sich die richtige, nämlich die Lorentz- Transformation. (Das war der Weg von A. Einstein zur speziellen Relativitätstheorie.)

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat in Inertialsystemen unabhängig von deren Bewegungs-zustand, dem der Lichtquelle und dem des Beobachters stets den gleichen konstanten Wert: Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist eine universelle Naturkonstante = c = 300.000 km/s = 300.000.000 m/s.

Experimentell gibt es keinerlei Zweifel an der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, nachgewiesen u. a. durch die folgenden Versuche:

- Beschleunigung von Elektronen zeigen die Begrenzung von Newton: m = m (v) = ?

- Äther - Hypothese aus der Analogie von Optik und Schall abgeleitet,

- Michelson - Morley - Experiment: 1881 in Potsdam, 1887 in den USA und weitere,

- 1675 Römers astronomische Messung an den Jupiter-Monden,

- Kenntnis der astronomischen Aberation des Lichtes von Bradley 1727,

- Doppler - Effekt aus der Akustik,

- Trouton - Noble - Versuch,

- Wien - Versuch,

- der Mitführungsversuch von Fizeau,

- Beobachtung der Lebensdauer von Myonen der atmosphärischen Höhenstarhlung,

- Sagnac - Versuch,

- Michelson - Gale - Versuch,

und weitere zeigen, daß die Lichtgeschwindigkeit eine universellen Konstante ist,

damit ergibt sich der Notwendigkeit, die Galilei - Transformation zu modifizieren.

2. Die Lorentz - Transformation.

Aus den bereits dargelegten Gründen (RT01) war eine Modifikation der Überlegungen zu den Galilei-Transformationen (1.10) notwendig, die zur Lorentz - Transformation führt; man wählt dazu den folgenden allgemeinen

$$Ansatz: y' = y \quad z' = z \quad x' = A(c,u)\cdot(x - u\cdot t) \quad t' = B(c,u)\cdot t,$$

$$sowie\ invers:\ y = y' \quad z = z' \quad x = A(c,u)\cdot(x' + u\cdot t') \quad t = B(c,u)\cdot t'.$$

wobei die Lichtgeschwindigkeit in I und in I´ konstant gleich c sein muß: damit läßt sich A(c, u) und B (c, u) errechnen. Es gibt mehrere mathematische Lösungsmöglichkeiten, aber nur eine davon genügt den experimentellen Bedingungen.

Vereinfacht wird hier jedoch ein Verfahren nur für die Ortskoordinatentransformation demonstriert und durchgeführt, welches aber ebenfalls zu dem richtigen Ergebnis führt:

$$2.1: In\ I: x = \gamma(c,u)\cdot(x' + u\cdot t') \quad und\,in\ I': x' = \gamma(c,u)\cdot(x - u\cdot t)$$

Die Ausdrücke für y, y´, z und z` bleiben erhalten, da ferner in I: x c=t sowie in I ´: x´t´=c ist (=Konstanz der Lichtgeschwindigkeit), ergibt in (2.1) die einfache Erweiterung mit t bzw. t´, das Ausklammern und schließlich die nachfolgenden Multiplikationen:

$$2.2: t\cdot c = t\cdot\frac{x}{t} = \gamma(c,u)\cdot t'\cdot\left(\frac{x'}{t'} + u\right) = \gamma\cdot t'\cdot(c+u)\ und\ t'\cdot c = t'\cdot\frac{x'}{t'} = \gamma\cdot t\cdot(c-u)$$

$$t\cdot t'\cdot c^2 = \gamma^2\cdot t\cdot t'\cdot(c+u)\cdot(c-u)\ mit\ \beta = \frac{u}{c}\ und\ daraus\ schließlich\ den$$

$$2.3: Lorentz - Faktor: \gamma(c,u) = \gamma(\beta) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ersetzt man in Gleichung (2.1) x´und löst nach t´auf, so ergibt sich der Reihe nach:

$$x = \gamma^2\cdot(x + u\cdot t) - \gamma\cdot u\cdot t',\ dann$$

$$t' = \frac{\gamma^2\cdot(x+u\cdot t) - x}{\gamma\cdot u} = \frac{\gamma^2\cdot x}{\gamma\cdot u} + \frac{\gamma^2\cdot u\cdot t}{\gamma\cdot u} - \frac{x}{\gamma\cdot u} = \gamma\cdot t + \gamma\cdot\frac{x}{u}\cdot\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma\cdot\left[t + \frac{x}{u}\cdot\left\{1 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right\}\right]$$

und daraus für die Zeit der

$$2.5: Lorentz - Faktor: t' = \gamma\cdot\left[t - \frac{u\cdot x}{c^2}\right]$$

Damit lauten die vollständigen Lorentz- = relativistischen Transformationen:

$$2.5: y' = y; z' = z; x' = \gamma\cdot(x - u\cdot t) = \frac{(x - u\cdot t)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ und\ \ t' = \gamma\cdot\left[t - \frac{u\cdot x}{c^2}\right] sowie\ invers:$$

$$y = y'; z = z'; x = \gamma\cdot(x' + u\cdot t') = \frac{(x' + u\cdot t')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ und\ \ t = \gamma\cdot\left[t' + \frac{u\cdot x'}{c^2}\right].$$

Diese Ausdrücken ist sofort anzusehen, daß für kleine Geschwindigkeiten u (also gegen 0, gleich dem klassischen Geschwindigkeitsbereich) die Lorentztransformationen in die schon bekannten klassischen Galileitransformationen (1.10) übergehen.

Die Ableitung der inversen Transformationen wird für die inverse Zeittransformation hier gezeigt:

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{u}{c^2} \cdot \left[\frac{x'}{\gamma} + u \cdot t \right] \right) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x'}{\gamma \cdot c^2} - \frac{u^2}{c^2} \cdot t \right) \textit{woraus folgt}:$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{\gamma^2}} \cdot \left[\frac{t'}{\gamma} + \frac{u}{c^2} \cdot \frac{x'}{\gamma} \right] = \gamma \cdot \left[t' + \frac{u}{c^2} \cdot x' \right], \textit{wie es sein muß.}$$

Überprüfen der Lorentz-Transformationen (2.5) für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen im Vakuum und die des Lichtblitzes:

2 A) Berechnungen zur Ausbreitung des Lichtblitzes in I und in I ´:
:

$$0 = \mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \ \textit{in kartesischen Koordinaten}$$

In diese Gleichung ist die Lorentztransformation (2.5) einzusetzen und auszumultiplizieren, dabei ist die Reihenfolge verändert:

$$\gamma^2 \cdot \left[x'^2 + 2x'ut' + u^2 t'^2 - c^2 t'^2 - 2x'ut' - u^2 x'^2 \cdot \frac{1}{c^2} \right] + y'^2 + z'^2 = 0$$

In der eckigen Klammer ist der zweite minus dem fünften, der dritte minus dem vierten und der erste minus dem sechsten Ausdruck gleich Null, außerdem ist natürlich noch:

$$\gamma^2 \cdot x'^2 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = x'^2 \ \textit{und damit}: \gamma^2 \cdot t'^2 \cdot \left(u^2 - c^2 \right) = -c^2 \cdot t'^2.$$

Damit ist gezeigt, daß der Lichtblitz sich in dem System I wie auch in dem System I´ sich als Lichtkugel mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ausbreitet.

2B) Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum (-1.7 -; Maxwell Gleichung):

$$0 = \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\Phi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \textit{Wellengleichung}.$$

Aus den Lorentztransformationen (2.5) sind die folgenden Identitäten gegeben, ableitbar durch Differentiationen:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma; \frac{\partial x'}{\partial t} = -u\gamma; \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma \frac{u}{c^2}; \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma; 1 = \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z}; 0 = \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \textit{etc.}$$

die erste Ableitung mit der Kettenregel nach der Ortskoordinate lautet:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \cdot \left(-\gamma \cdot \frac{u}{c^2} \right)$$

und die zweite Ableitung nach den Ortskoordinaten:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \gamma^2 \cdot \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{u^2}{c^4} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - \frac{2u}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x' \cdot \partial t'} \right)$$

für die Zeitkoordinate gilt natürlich bei der Anwendung der Kettenregel entsprechendes:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -u \cdot \gamma \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x'} + \gamma \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \textit{ sowie}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \cdot \left(u^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - 2u \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x' \cdot \partial t'} \right); \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} \textit{ und } \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}.$$

Diese errechneten Ausdrücke sind in die elektromagnetische Wellengleichung (1.7) einzusetzen und sie ergeben:

$$0 = \gamma^2 \cdot \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - \frac{2u}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x' \cdot \partial t'} - \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} + \frac{2u}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x' \cdot \partial t'} \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}.$$

Dies entspricht der eingangs genannten Wellengleichung in den Systemen I und I´, da das erste und das vierte, das zweite und das fünfte und das dritte und das sechste Glied in der Klammer addiert gerade die fehlenden Glieder der elektromagnetischen Wellengleichung (1.7) ergibt:

$$0 = \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\Phi} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.$$

3: Landau, Lorentz & Minkowski + Zusammenfassung.

Die bisher gesammelten Kenntnisse erzwingen einen vierdimensionalen Raum, der 1908 von H. Minkowski eingeführt wurde und die **vier - dimensionale - Minkowski - Raum - Zeit - Welt** genannt wird.

Diese vierdimensionale Raum-Zeit-Welt hat die Koordinaten:

$$3.1: \textit{Aus } x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (i \cdot c \cdot t)^2 = 0$$

$$\textit{ergeben sich Koordinaten } \mathbf{a} = (x, y, z, ict) = (\mathbf{r}, ict).$$

Damit muß die gesamte klassische Physik, d. h. die Elektrodynamik von Maxwell & Co und die Mechanik von Newton & Co so umschreibbar sein, daß alle bekannten Gesetzmäßigkeiten in der Viererschreibweise Minkowkis Lorentzinvariant werden: dies tat Minkowski gleichfalls 1908.

Hat man noch die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins vor sich, so empfiehlt es sich jedoch, schon die spezielle Relativitätstheorie mathematischer, nämlich in Form einer Metrik, zu formulieren, die mit der Minkowski-Darstellung mathematisch für die spezielle Relativitätstheorie allerdings identisch ist.

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist nur eine Darstellung in der Metrik möglich.

In der Literatur sind die Schreibweisen nach Landau und nach Minkowski zu finden, üblich sind die von Landau:

$$3.2: \begin{cases} \textit{Landau}: (c \cdot t, x, y, z) = (c \cdot t, \mathbf{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3); \\ \textit{Minkowski}: (x, y, z, i \cdot c \cdot t) = (\mathbf{r}, i \cdot c \cdot t) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \{x_\mu\},\ \mu = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Die Lorentztransformation (2.5, 3.1) vom System I ins System I´ ist nicht orthogonal, d. h., die Matrixdeterminante (3.3) ist verschieden von 1:

$$3.3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -u\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma \frac{u}{c^2} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Minkowski hat diese Lorentz-Transformation so umgeschrieben, wie es ähnlich auch bei Skalaren, Vektoren und Tensoren durchgeführt wird und die Matrix **L** orthogonal wird:

$$3.4: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma \frac{u}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma \frac{u}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\gamma \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

Damit wird der vierdimensionale Abstand (3.1) und auch der Abstand des infinitesimale Abstandselement (3.5) gegenüber der Lorentztransformation invariant:

$$3.5: \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d(ct)^2. \textit{ Setzt man noch } \quad \frac{u}{c} = \beta = \tanh \alpha,$$

so kann die Lorentztransformation unter Beachtung der Additionstheoreme als eine Drehung um den

Winkel Alpha in der vierdimensionalen Raum - Zeit angesehen werden:

$$\mathit{Additionstheoreme}: \sinh\alpha - \cosh\alpha = 1; \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh\alpha}} \;\mathit{und}\; \sinh\alpha = \frac{\tanh\alpha}{\sqrt{1-\tanh\alpha}}$$

$$\mathbf{L}(\beta) = \mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & i\sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix} \mathit{mit}\; \mathbf{L}(\alpha_1)\cdot\mathbf{L}(\alpha_2) = \mathbf{L}(\alpha_1+\alpha_2).$$

In der Metrik ist der Abstand als allgemeiner Pythagoras als infinitesimale Größe eine Verallgemeinerung von (3.3):

$$3.6: ds^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu}\cdot dx^\mu \cdot dx^\nu, \mathit{wobei\ die}\ dx^\mu, dx^\nu\ \mathit{die\ Koordinatendifferenzen\ im}\ \mathbf{V}^4.$$

$$3.7: \quad \mathit{Metrik-Tensor} = \{\mathbf{g}_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \mathit{in\ Minkowski-Schreibweise.}$$

Werden im System I und im System I´ die Vektoren **a** und **b** und **a´** sowie **b´** gewählt mit der Landau-Schreibweise:

$$I: \mathbf{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3); \mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)\ \mathit{und\ in}\ I': \mathbf{a} = (a'^0, a'^1, a'^2, a'^3); \mathbf{b} = (b_0', b_1', b_2', b_3')$$

und gelten noch die Beziehungen:

$$a'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet a^\nu \;\mathit{sowie}\; b_\mu' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet b_\nu$$

so heißen die a´s kontravariante und die b´s kovariante Vierervektoren und alle Arten von Rechnungen für Skalare, Vektoren und Tensoren vereinfachen sich drastisch.

Sofern das Betragsquadrat dieses Vektors von **a** größer als Null ist, spricht man von einem zeitartigen Abstand, ist es gerade gleich Null, ist der Abstand lichtartig und ist er schließlich kleiner als Null, so ist der Abstand in der Vierdimensionalen Welt raumartig:

$$3.8: \quad |a'^\mu|^2 = \begin{cases} > 0, \mathit{so\ ist}\ a'^\mu\ \mathit{zeitartig,} \\ = 0, \mathit{so\ ist}\ a'^\mu\ \mathit{lichtartig,} \\ < 0, \mathit{so\ ist}\ a'^\mu \mathit{raumartig.} \end{cases}$$

Damit lassen sich auch die einfachen kinematischen Begriffe wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{array}{r} 3.9: \\ 3.10: \\ 3.11: \end{array}\right\} = \begin{cases} der\ Vierer-Ortsvektor = \left\{x^{\mu}\right\};\ und\ die \\ Vierer-Geschwindigkeit = \left\{u^{\mu}\right\} = \left\{\dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau}\right\};\ und\ die \\ Vierer-Beschleunigung = \left\{b^{\mu}\right\} = \left\{\dfrac{\partial u^{\mu}}{\partial \tau}\right\} = \left\{\dfrac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \tau^2}\right\}. \end{cases}$$

Die Komponenten der Vierer - Beschleunigung lauten aus

$$\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)}{dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right):$$

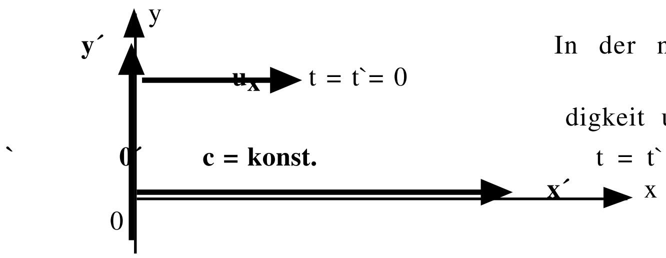
daraus ergeben sich die einzelnen Komponenten der Beschleunigung:

$$3.12: b^1 = \gamma^2 \cdot \frac{dv_x}{dt} + \gamma^4 \cdot \frac{v_x}{c^2} \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right); b^2 = \gamma^2 \cdot \frac{dv_y}{dt} + \gamma^4 \cdot \frac{v_y}{c^2} \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right);$$

$$b^3 = \gamma^2 \cdot \frac{dv_z}{dt} + \gamma^4 \cdot \frac{v_z}{c^2} \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right);\ sowie\ b^4 = \frac{\gamma^4}{c} \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right).$$

Vierer - Beschleunigung und die Vierer - Geschwindigkeit stehen natürlich stets senkrecht aufeinander:

4. : Direkte und einfache Folgerungen (aus der Lorentz-Transformation):



In der nebenstehenden Abbildung fliegen die beiden Inertialsysteme I und I`mit der konstanten Geschwindigkeit $u_x$ aneinander vorbei, so daß sich für die Zeit t = t` = 0 die Ursprünge von I und von I` decken.

Für diese Situation gilt für den **Ort:**

$$4.1: x' = \gamma \cdot (x - u_x \cdot t) = \gamma \cdot (c \cdot t - u_x \cdot t) = \gamma \cdot c \cdot t \cdot \left(1 - \frac{u_x}{c}\right) = c \cdot t \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u_x}{c}}}{1 + \frac{u_x}{c}}$$

und für die **Zeit:**

$$4.2: t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{u_x \cdot x}{c^2}\right) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u_x}{c^2} \cdot c \cdot t\right) = \gamma \cdot t \cdot \left(1 - \frac{u_x}{c}\right) = t \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u_x}{c}}}{1 + \frac{u_x}{c}}$$

womit sofort folgt, daß x`= ct`ist. Von den Ursprüngen (0, 0`) werden in I und in I` die beiden Ereignisse A und B beobachtet mit einer Zeitdifferenz von:

$$4.3: t_B - t_A = \gamma \cdot \left[(t'_B - t'_A) + \frac{u_x}{c^2} \cdot (x'_B - x'_A) \right]$$

Eine Gleichzeitigkeit im System I`im Ursprung 0`bedeutet, daß

$$t'_B - t'_A = 0 \; ist, und\; damit\; t_B - t_A = \gamma \cdot \left[\frac{u_x}{c^2} \cdot (x'_B - x'_A) \right]$$

auch im System I gibt es in 0 keine Gleichzeitigkeit, außer wenn: $x'_B = x'_A$.

4.2: Relativistische Längenmessungen:

Im System I` ist $x'_B - x'_A = L_0$:

$$x'_B - x'_A = \gamma \cdot \left[(x_B - x_A) + (t_B - t_A) \right]$$

Wird x_A und x_B im System I zur selben Zeit, ($t_B - t_A = 0$), gemessen, dann ist im System I die Länge $L = x_B - x_A$

$$4.4: L_0 = \gamma \cdot L, \quad die\; Lorentz - Fitzgerald - Längen - Kontraktion.$$

4.3: Relativistische Zeitmessungen:

Werde das System I` mit dem Ursprung 0` mit der Geschwindigkeit u gegenüber dem System I und 0 bewegt, so ist:

$$\Delta t' = \gamma \cdot \left[\Delta t'_0 - \frac{u}{c^2} \cdot (x_B - x_A) \right]$$

Wird am gleichen Ort im System I bei 0 gemessen ($x_A = x_B$), so ergibt sich :

$$4.5: \Delta t' = \gamma \cdot \Delta t = die\; Zeit - Dilatation, daraus \Rightarrow d\tau = \gamma \cdot dt, die\; Eigenzeit.$$

4.4: Relativistische Geschwindigkeiten:

Aus den Lorentz-Transformationen („.5) folgen:

$$dx' = \gamma \cdot (dx - u \cdot dt) \; und \; dt' = \gamma \cdot \left(dt - \frac{u}{c^2} \cdot dx \right), \; damit \; wird:$$

$$4.6: v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma \cdot (dx - u \cdot dt)}{\gamma \cdot \left(dt - \frac{u}{c^2} \cdot dx \right)} = \frac{(dx - u \cdot dt)}{\left(dt - \frac{u}{c^2} \cdot dx \right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - u \right)}{\left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{(v_x - u)}{\left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x \right)}$$
, sowie

$$v'_y = \frac{\gamma \cdot v_y}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v'_x} \; sowie \; v'_z = \frac{\gamma \cdot v_z}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v'_x}. \quad v^i = \left(\gamma, \frac{\gamma}{c} \cdot \mathbf{v} \right) ist$$

als Vierergeschwindigkeit dimensionslos.

In der Metrik - Darstellung t werden die Differentiale des Ortsvektors und der Eigenzeit berechnet, woraus sich ergibt:

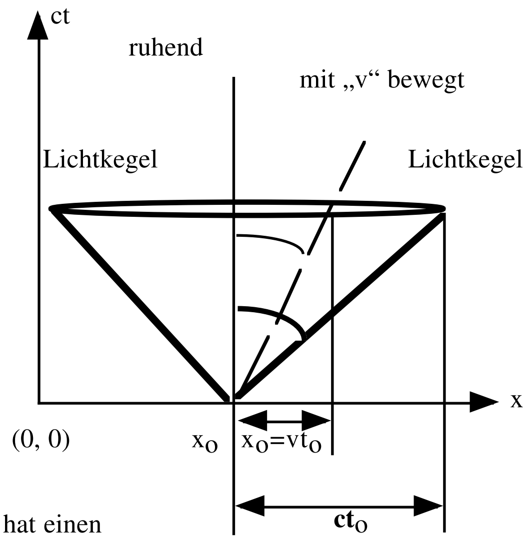
$$\{dx^\mu\}; \{d\tau\} \; und \; daraus \Rightarrow \{v^\eta\} = \left\{ \frac{dx^\mu}{d\tau} \right\}, \; wobei \; \{x^\mu\} = [x, y, z, c \cdot t] \; und \; \{x_\mu\} = [-x, -y, -z, c \cdot t]$$

Damit lassen sich die einzelnen Komponenten der Vierergeschwindigkeit durch Anwendung der Kettenregel berechnen:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \gamma \text{ , } damit \; u^1 = \gamma \cdot v_x; u^2 = \gamma \cdot v_y; u^3 = \gamma \cdot v_z \; und \; u^4 = \gamma \cdot c.$$

In ähnlicher Weise errechnet sich die Viererbeschleunigung, die stets auf der Vierer-Geschwindigkeit senkrecht steht.

Die Konsequenzen der Längenkontraktion und die der Zeitdilatation lassen sich in einer geometrischen Form, den Minkowskischen Raum-Zeitdiagrammen veranschaulichen. Die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt wird, da diese grafisch nicht darstellbar ist, auf eine x - t - Welt reduziert, siehe Abbildung.



Das nebenstehende Raum-Zeit-Diagramm hat die Koordinaten (x, ct) mit x - Achse als Ortskoordinate x und y - Achse als ct-Achse. Ein in x_O ruhender Beobachter schreitet in der Zeit t parallel zur ct - Achse im Abstand x_O weiter vor, dies ist die Weltlinie des ruhenden Punktes.

Ein Beobachter mit der Geschwindigkeit „v" = konstant bildet eine Gerade, die unter einem Winkel zwischen 0^O und 45^O zur ct - Achse verläuft. Der Tangens dieses Winkels ist der Quotient aus „v"t dividiert durch ct.
Ein Lichtblitz am Ort x_O breitet sich mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c auf den beiden Lichtkegeln aus, die unter dem Winkel 45^O die x - Achse schneiden.
Dieser Lichtkegel ist natürlich dreidimensinal, d. h., er breitet sich von einem Raumpunkt in alle Raumrichtungen gleichzeitig aus und hat einen Öffnungswinkel von 90^O.
Alle kausal verbundenen Ereignisse müssen also innerhalb dieses Lichtkegels liegen.
Diese Diagramme machen insbesondere den relativen Charakter von Gleichzeitigkeit unter anderem deutlich.
Weitere Informationen siehe Literatur.

5. Weitere einfache Beispiele aus der Lorentz - Transformation:

Konstanz der Lichtgeschwindigkeiten in den Systemen I und I\` bedeutet entsprechend der Abbildung in (RT04) im Ursprung O und O\` , daß zur Zeit t = t\` = 0 dort ein Lichtblitz abgestrahlt wird mit

$u_x = c$ *und* $u_y = u_z = 0.$ *Einsetzen der Lorentztransformationen* 2.5 *ergibt*:

$$u'_x = \frac{u_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot u_x} = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot c} = c = \textit{Lichtgeschwindigkeit.}$$

5.1: Invarianten der Lorentz-Transformation:

Die nachfolgend angegebene Größe ist Lorentz- invariant

$$\Sigma\, x^{\mu} \cdot x_{\mu} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - c^2 \cdot t^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - c^2 \cdot t'^2 = 0$$

5.2: Additionstheorem der Geschwindigkeiten (Einstein):

Aus der Lorentz - Transformation läßt sich das Additionstheorem der Geschwindigkeiten ableiten:

$$= \left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{vt' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \cdot t' \cdot (v + u) \\ t &= \frac{t' + \frac{u \cdot x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{u \cdot v \cdot t'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \cdot t \cdot \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} = \frac{x}{t} = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}} = v_3;$$

Daraus lassen sich einige Grenzfälle ableiten:

1. $v = c = u : \frac{x}{t} = v_3 = \frac{2c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c,$ *der Lichtgeschwindigkeit,*

2. $u = c - \lambda$ *und* $v = c - k : \frac{x}{t} = v_3 = c \cdot \frac{2c - k - \lambda}{2c - k - \lambda + \frac{k \cdot \lambda}{c}} < c,$ *der Lichtgeschwindigkeit,*

5.3: Relativistische Energie- und Massenabhängigkeiten:

Für die Quanten des Lichtes gilt:

$$5.1: \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \textit{ mit } \mathbf{p} = m \cdot c \Rightarrow d\mathbf{p} = c \cdot dm \Rightarrow c \cdot \frac{dm}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \Rightarrow dE = c^2 \cdot dm$$

integriet von Null an:

$$5.2: E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \textit{ mit } E = mc^2.$$

5.4: Longitudinale und transversale Masse:

Ferner gilt noch, daß

$$5.3: \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{dE}{dt} \textit{ und mit } (5.1) \Rightarrow \mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \frac{dm}{dt} \textit{ und aus } (5.2) \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\mathbf{f} = m \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dE}{dt}, \textit{ woraus} \Rightarrow$$

$$5.4: \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \left(\mathbf{f} - \mathbf{v} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right).$$

Folgende zwei Fälle sind unterscheidbar:

Die Kraft **f** ist parallel oder senkrecht zur Geschwindigkeit **v** der Teilchen, man spricht von longitudinaler und von transversaler Masse, dies hat bei Bau von Beschleunigern Bedeutung.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Fall } 1: \\ \textit{Fall } 2: \end{array}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \,//\, \mathbf{v} : \mathbf{a} = \frac{1}{m} \cdot \mathbf{f} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\mathbf{f}}{m_{\parallel}} = \textit{longitudinale Masse}, \\ \mathbf{f} \perp \mathbf{v}, \textit{ damit} \Rightarrow \{(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0)\} \textit{ und } \ \mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m_{\perp}} = \textit{longitudinale Masse.} \end{array} \right.$$

5.5: Energie- und Massenabhängigkeit:

Mit den Formeln 5.2 und 5.3 folgt noch leicht:

$$dE = c^2 dm = v^2 dm + m\mathbf{v}d\mathbf{v}, \textit{ daraus} \Rightarrow \frac{dm}{m} = \frac{\mathbf{v}d\mathbf{v}}{c^2 - v^2} \ \Rightarrow \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathbf{v}d\mathbf{v}}{c^2 - v^2}$$

mit dem Ergebnis der Energie und Masse:

$$5.5: m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot m_0 = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots \right)$$

$$5.6: E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 + \ldots$$

5.6: Relativistische Energie:

Aus den Gleichungen für die Energie (5.2), der Masse (5.5) und **p** = m **v** lassen sich m und **v** eliminiern und es folgt sogleich

$$5.7: E^2 - {m_0}^2 \cdot c^4 = p^2 \cdot c^2 \Leftrightarrow E = c \cdot \sqrt{p^2 + {m_0}^2 \cdot c^2}.$$

Drei Fälle können unterschieden werden:

$$5.7.a: \textit{Teilchen ohne Ruhemasse wie Neutrino, Photon}(m_0 = 0): E = c \cdot p.$$

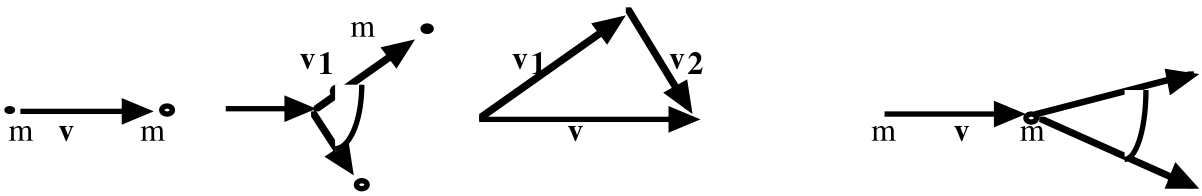
$$5.7.b: v << c: E = m_0 \cdot c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + \ldots, \textit{ siehe } (5.6).$$

$$5.7.c: v \approx c \ (\textit{relativistische Teilchen}): \mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} = m_0 \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma \Rightarrow p^2 = \gamma^2 \cdot {m_0}^2 \cdot v^2 \frac{1}{c^2} \cdot c^2.$$

Die Ruhemasse spielt nahe der Lichtgeschwindigkeit keine Rolle mehr uns es ist:

$$5.8: E \approx c \cdot p, da \quad \gamma^2 \cdot m_0 \cdot c^2 >> m_0 \cdot c^2.$$

5.7: Relativistischer elastischer Stoß mit zwei gleichen Massen m:



Klassischer Fall (Newton): bewegtes Teilchen stößt ruhendes
Der Stoßwinkel alpha ist 90°. Es gilt die Energieerhaltung:

Relativistischer Fall
Es gelten der Energie- und Impulserhaltungssatz.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} + \frac{1}{2}mv_2^{\,2}; \textit{das ist Pyzhagoras} \Rightarrow v^2 = v_1^{\,2} + v_2^{\,2}$$

Relativistisch bezieht man alle Rechnungen auf das Laborsystem (oder auf die Koordinaten eines bewegten Teilchens).

Im Laborsystem gelten für die Teilchen der Energie- wie der Impulserhaltungssatz:

$$\textit{Laborsystem mit } m_0 = 0;\ p_0 = 0 \textit{ und } E_0 = m_0 \cdot c^2$$

Das einfallende Teilchen hat Energie und Impuls entsprechend (5.7):

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Energiesatz} \Rightarrow E + E_0 = E_1 + E_2 \\ \text{Im}\textit{pulssatz} \Rightarrow \mathbf{p} + 0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 = p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha, \Rightarrow$$

$$p^2 = p^2 + m_0^{\,2} \cdot c^2 + m_0^{\,2} \cdot c^2 = p_1^{\,2} + m_0^{\,2} \cdot c^2 + p_2^{\,2} + m_0^{\,2} \cdot c^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha, \Rightarrow$$

$$\frac{E^2}{c^2} + \frac{E_0^{\,2}}{c^2} = \frac{E_1^{\,2}}{c^2} + \frac{E_2^{\,2}}{c^2} + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha.$$

Daraus folgt die Winkelabhängigkeit des relativistischen Stoßes:

$$5.9: \cos\alpha = \frac{E^2 + E_0^{\,2} - E_1^{\,2} - E_2^{\,2}}{2 \cdot c^2 \cdot p_1 \cdot p_2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2E_0}{E_1 - E_0}\right)\left(1 + \frac{2E_0}{E - E_1}\right)}}.$$

Damit ist klar, daß

$$\textit{für } \cos\alpha < 1 \textit{ stets} \Rightarrow \alpha_{\min} < \alpha < 90^0.$$

Spezielle Relativitätstheorie

6. Die Mechanik Newtons in der Minkowski - Welt:

Es ist bereits früher die Eigenzeit, der Vierer-Ortsvektor und die Vierer-Geschwindigkeit definiert worden:

$$Eigenzeit\,(4.5): d\tau = \frac{1}{\gamma}\cdot dt; Ortsvektor(3.9) = \{x^\nu\} = (x,y,z,c\cdot t) = (x^1,x^2,x^3,x^4); und$$

$$Vierergeschwindigkeit\,(3.10) = \left\{\frac{dx^\nu}{d\tau}\right\} = \{u^\nu\} = \left\{\frac{dx^\nu}{dt}\right\}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \gamma\cdot\left\{\frac{dx^\nu}{dt}\right\} = \{\gamma\cdot\mathbf{v}^N,\gamma\cdot c\}$$

$$ausgeschrieben: u^1 = \gamma\cdot v_x; u^2 = \gamma\cdot v_y; u^3 = \gamma\cdot v_z; und: u^4 = \gamma\cdot c = \gamma\cdot\frac{d(c\cdot t)}{dt}.$$

Für kleine Geschwindigkeiten folgen die bekannten Newtonschen Zusammenhänge:

$$v << c :\Rightarrow \gamma = 1\; und\; damit: \{u^i\} = \mathbf{v}^N\; mit\; i = 1,2,3.$$

6.1: Die Minkowski - Kraft

Ensprechend der Newtonschen Kraftdefinition (1.2) stammt von Minkowski die Minkowski-Kraft:

$$6.1: \quad \mathbf{F}^\mu = m_0\cdot\frac{d}{d\tau}\{u^\mu\} = m_0\cdot\frac{d}{dt}\{u^\mu\}\cdot\frac{dt}{d\tau} = m_0\cdot\gamma\cdot\frac{d}{dt}\{u^\mu\}$$

Es folgt die Untersuchung der Newtonschen (klassischen) Komponenten (i = 1, 2, 3):

$$\mathbf{F}^i = m_0\cdot\gamma\cdot\frac{d}{dt}\{u^i\} = \gamma^2\cdot m_0\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{v}^N,\Rightarrow$$

$$6.2: \quad \mathbf{F}^i = \gamma^2\cdot m_0\cdot\frac{d\mathbf{v}^N}{dt} = \gamma\cdot\mathbf{F}^N; die\; Komponenten\; i\; der\; Minkowskikraft\; ergibt\; Newton\times\gamma.$$

Die Multiplikation von (6.1) mit dem Ortsvektor (3.9) ergibt:

$$\mathbf{F}^\mu\cdot\{x_\mu\} = m_0\cdot\frac{d}{d\tau}\{x^\mu\}\cdot\{x_\mu\} = m_0\cdot\frac{dc^2}{d\tau} = 0\; und$$

$$\mathbf{F}^\mu\cdot\{x_\mu\} = \gamma\cdot\mathbf{F}^N\cdot\{x_\mu\} - \gamma\cdot\mathbf{F}^4\cdot c = \gamma\cdot\mathbf{F}^N\cdot\mathbf{v}^N\cdot\gamma - \gamma\cdot\mathbf{F}^4\cdot c = 0\text{, } damit$$

$$6.3: \quad \mathbf{F}^4 = \frac{\gamma}{c}\cdot\mathbf{F}^N\cdot\mathbf{v}^N = \frac{\gamma}{c}\cdot\frac{dE^N}{dt}0\text{, } siehe\; 5.1.$$

Jetzt können die vier Komponenten der Minkowski - Kraft (6.1) vollständig angegeben werden:

$$6.4: \quad \mathbf{F}^\mu = m_0\cdot\frac{d}{d\tau}\{u^\mu\} = \left\{\gamma\cdot\mathbf{F}^N,\frac{\gamma}{c}\cdot\mathbf{F}^N\cdot\mathbf{v}^N\right\}$$

Wobei noch die folgenden Schlüsse gezogen werden können:

$$\mathbf{F}^N = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \; sowie\ noch \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^N \cdot \mathbf{v}^N .$$

Ist $\mathbf{F}^N$=0, so folgen der Energie- und Impulserhaltungssatz in differenteiller Form: 0 = dE = d**p**.

6.2: Der Vierer - Impuls:

Der Vierer - Impuls ist analog wie bei Newton definiert:

$$\left\{\mathbf{p}^\mu\right\} = m_0 \cdot \left\{u^\mu\right\} \quad und \quad \mathbf{F}^N = \frac{d}{dt}\left\{\mathbf{b}^\mu\right\}; mit \left\{\mathbf{p}^i\right\} = \gamma \cdot m_0 \cdot \mathbf{v}^N \; (i = 1,2,3)\; und\; p^4 = m_0 \cdot u^4 = \gamma \cdot m_0 \cdot c$$

ferner gilt noch

$$6.5: \quad \mathbf{p}^N = m \cdot \mathbf{v}^N = \frac{m \cdot c^2}{c^2} \cdot \mathbf{v}^N = \frac{E}{c^2} \cdot \mathbf{v}^N \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^N = \frac{c^2}{E} \cdot \mathbf{p}^N$$

6.3: Der relativistische Drehimpuls:

Die Untersuchung des klassischen Drehimpulses zeigt, daß der Drehimpuls der klassischen Mechanik ein ein Pseudo - Vektor, also ein schiefsymmetrischer Tensor ist

$$6.6: \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}^N \times \mathbf{p}^N \; mit \left(L^{ik}\right) = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Das ist der relativistische Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes.

6.4: „Starre Körper“:

Nach der speziellen Relativitätstheorie mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit können keine starren Körper existieren, da, wenn dieser Körper an einer Ecke in Bewegung gesetzt würde, sich sogleich alle Partien des Körpers in Bewegung setzen müßten im Widerspruch zur endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der speziellen Relativitätstheorie.

6.5: „Ausdehnung von Elementarteilchen:

Die Elementarteilchen sollten durch die drei Koordinaten des Raumes und durch die drei Komponenten der Geschwindigkeit vollkommen beschrieben sein.

Beim Einwirken von äußeren Kräften kann ein Elementarteilchen keine Ausdehnung haben, sondern muß **echt punktförmig** sein. (Gewisse Modifikationen sind durch die Quantentheorie notwendig.)

7. Die Elektrodynamik in der Minkowski - Welt:

Es ist zu überprüfen, ob die Maxwellschen Gleichungen (1.4) in den beiden Inertialsystemen I und I´ gleich aussehen, wenn die Lorentz - Transformation (2.5) angewandt werden.

Es gilt die Ladungserhaltung für den Strom **j** un d die den Strom verursachenden Ladungen und damit

$$7.1: div\,\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \; als\; Kontinuitätsgleichung$$

$$7.1.1: Für\; die\; Potentiale\; \mathbf{B} = rot\,\mathbf{A} \quad und \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - grad\phi \quad und\; der\; Lorentzkonvention\,(1.6)$$

lauten

$$7.2: Vierer-Potential = \left\{\Phi^{\mu}\right\} = \left\{\mathbf{A}; \frac{\phi}{c}\right\} \propto \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial \frac{\phi}{c}}{\partial ct} = 0$$

$$7.3: Vierer-Stromdichte = \left\{\mathbf{j}^{\mu}\right\} = \left\{\mathbf{j}; c\cdot\rho\right\} \propto \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial c\cdot\rho}{\partial ct} = 0$$

Damit gehen die beiden Potentialgleichungen

$$7.4: \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho = -\mu_0\cdot c^2\cdot\rho;$$

$$7.5: \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0\cdot\mathbf{j} \quad über\; in\; die$$

$$7.6: \Diamond\phi^{\mu} = \mu_0\cdot\mathbf{j}^{\mu} = Vierer-Potential-Gleichung.$$

Die elektrodynamischen Potentiale (7.1.1) lassen sich mit (7.4) und **B** und **E** in einen Tensor (Feldstärkentensor) zusammenfassen:

$$\left(F_{\nu\mu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{1}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{1}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}; sowie \left(F^{\nu\mu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$7.7: \quad \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad für \quad \nu,\mu,\lambda = 1,2,3,4.\; Dies\; entspricht$$

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\; und\; div\,\mathbf{B} = 0\; der\; Maxwel\lg leichungen\,(1.4).$$

Die entsprechenden Gleichungen für das magnetische Feld lauten (Feldstärkentensor):

$$7.8: \sum_{\nu,\mu}^{x,y,z} \frac{\partial H^{\nu\mu}}{\partial x^{\mu}} = \left\{ \mathbf{j}^{\nu} \right\} \quad und\ entsprechen: rot\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad und \quad div\,\mathbf{D} = \rho \ \ mit$$

$$\left(H_{\nu\mu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & c\cdot D_x \\ -H_z & 0 & H_x & c\cdot D_y \\ H_y & -H_x & 0 & c\cdot D_z \\ -c\cdot D_x & -c\cdot D_y & -c\cdot D_z & 0 \end{pmatrix}; sowie \left(H^{\nu\mu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -c\cdot D_x \\ -H_z & 0 & H_x & -c\cdot D_y \\ H_y & -H_x & 0 & -c\cdot D_z \\ c\cdot D_x & c\cdot D_y & c\cdot D_z & 0 \end{pmatrix}$$

Im Vakuum vereinfachen sich die Gleichungen noch weiter, da gilt:

$$7.9: F_{\nu\mu} = \mu_0 \cdot H_{\nu\mu} \quad und \quad F^{\nu\mu} = \mu_0 \cdot H^{\nu\mu}.$$

Es lassen sich das Transformationsverhalten der elektrodynamischen Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ berechnen, so zum Beispiel:

$$7.10: \quad E'_x = E_x \quad und \quad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \gamma \cdot \left(E_y - c \cdot \frac{u^2}{c^2} \cdot B_z \right); B'_y = \gamma \cdot \left(B_y + \frac{1}{c} \cdot \frac{u^2}{c^2} \cdot E_z \right)$$

$$E'_z = \gamma \cdot \left(E_z + c \cdot \frac{u^2}{c^2} \cdot B_y \right); B'_z = \gamma \cdot \left(B_z - \frac{1}{c} \cdot \frac{u^2}{c^2} \cdot E_y \right).$$

Bei der Lorentztransformation ergeben sich zwischen den elektrischen und den magnetischen Feldstärken Verknüpfungen, die aus der klassischen Theorie des Elektromagnetismus erst mühselig hinsichtlich des Faktors Gamma iterativ berechnet werden müßte.

Im Dreidimensionalen wirkt auf die Ladung e (siehe RT01, Seite 2) die Lorentzkraft (1.5).

Das Transformationsverhalten der Minkowskikraft (6.1) bzw. (6.4) und der beiden Feldstärkevektoren ergeben zwangsläufig die Lorentzkraft (1.5), siehe Literatur.

Weiterhin kann noch, was hier nicht geschehen soll,
- die Energie und der Impuls des elektromagnetischen Feldes im Vakuum angegeben werden,
- die Ausbreitung elktromagnetischer Wellen im Vakuum, polarisiert, berechnet werden,
- und daraus der longitudinale wie auch trasversale Dopplereffekt, der für die Blau- und Rotverschiebung der Spektren verantwortlich ist:

$$7.11: \quad \omega' = \omega \cdot \sqrt{\frac{1-/+\beta}{1+/-\beta}} \approx \omega \cdot \left(1-/+\beta\right) \ f\ddot{u}r\ v << c: entspricht\ dem\ longitudinalen\ D.E.$$

$$7.12: \omega' = \omega \cdot \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \omega \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \beta^2 + ...\right).$$

ist dagegen als transversaler ein reiner relativistischer Effekt,

- die Aberation des Lichtes,

- außerdem kann eine Erweiterung für die magnetisierbare und polarisierbare Materie.

Schließlich muß natürlich der Einbau der speziellen Relativitätstheorie in die Quantentheorie noch untersucht werden, siehe unter Quantentheorie.

8. Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation = Geometriedynamik

Zu Beginn werden die beiden ersten Seiten von Einsteins Veröffentlichung vorgelegt, die aus der Sicht der Jahre 1915/1916 die damals sich stellenden Probleme zeigen: siehe Anlage.

Nach Landau ist die Theorie der Gravitazionsfelder die allgemeine Relativitätstheorie, die durch viele astrophysikalische Beobachtungen verifizierbar ist, sie wird im amerikanischen Wissenschaftssprachgebrauch **Geometrodynamics** genannt .

Sofern es eine echte Gravitation gibt, ist diese nicht mit mathematischen Mitteln hinwegzutransformieren, d. h. , daß die reale Raum - Zeit - Welt eine echte Krümmung besitzt.

Die spezielle Relativitätstheorie wies noch einige Mängel auf:

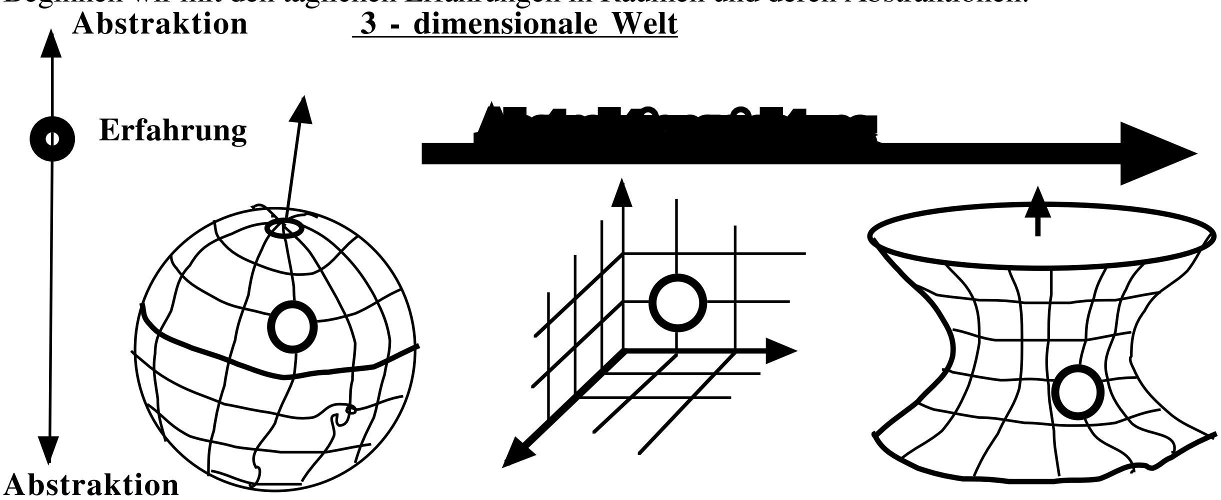
* das fehlen der Gravitation oder Schwere mit der Anknüpfung an die Gesetze Newtons & Co;

* das Festhalten und die festlegung auf die Galiläi - Koordinaten (x, y, z, ct) und auf die euklische geometrie,

* die Verwendung von Inertialsystemen, die sich gegeneinander mit der konstanten Geschwindigkeit **u** bewegen und die keinen Beschleunigungen $\mathbf{a_i}$ unterliegen,

* der Einbau von allen Aspekten der Quantentheorien ist mathematisch wie physikalisch unverstanden.

Beginnen wir mit den täglichen Erfahrungen in Räumen und deren Abstraktionen:



Es gibt in der realen Welt fast nur gekrümmte 3 - dimensionale Körper, z. B. der eigene Körper.

Durch Messen an Körpern werden Flächen und Längen festgelegt, z. B. beim Schneider, der diese Maße erst in die 2 - dimensionale Welt übertragt = Tuchschneiden und dann wieder in der 3 - D - Welt einen Anzug, Kleid, u. ä. herstellt.

Man beachte die Verhältnisse eines Kreises auf der Erde, in einem kartesischen Koordinatensystem und einem Hyperboloiden:

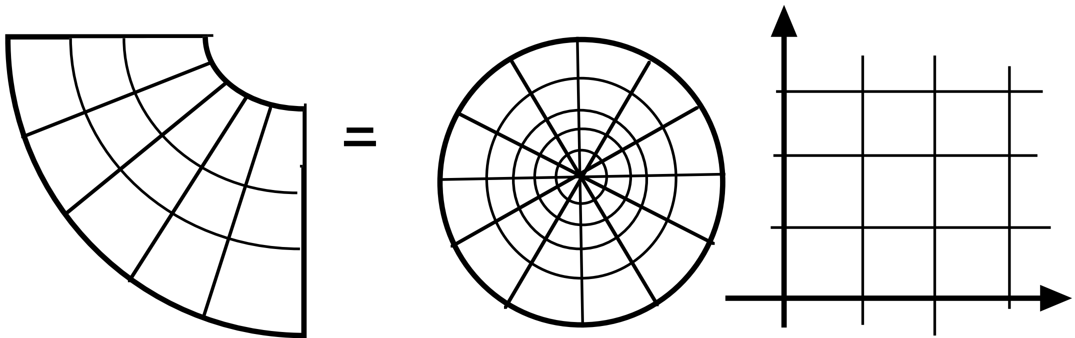
$$8.1: U_{Kreis} = ?$$

Die Antwort ist für das euklidische System in kartesischen Koordinaten bekannt, sie lautet:

$$8.2: U_{Kreis,\ Euklid} = 2 \cdot \pi \cdot r;\ jedoch \quad U_{Kreis\ auf\ der\ Kugel} \leq 2 \cdot \pi \cdot r\ und: U_{Kreis\ auf\ dem\ Hyperboloid} \geq 2 \cdot \pi \cdot r$$

3 - D - Welt: Körper, etc.

Die dreidimensionale Welt wird in die **zweidimensionale Welt** übertragen:

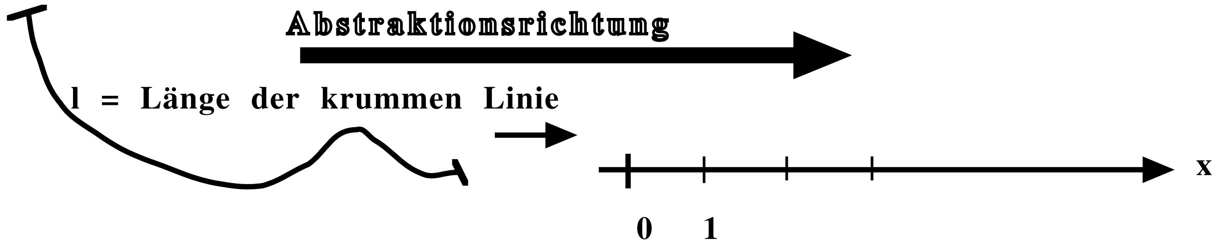


Kreisausschnitt = Teil eines Kreises: im Kleinen kartesisch!

Aus der 3 - D - Welt wird zur 2 - D - Welt abstrahiert, jedoch bleibt im Kleinen alles eben, insbesondere werden rechte Winkel verwendet und die Beziehungen von Pythagoras gelten.

Abstraktion

Schließlich werden die Werte der 2 - D - Welt z. B. über die Länge der Schnitte, Länge von Kabeln, etc. in die **eindimensionale Welt** übersetzt:



Über die 3 - D - Welt hinaus existieren noch höher dimensinierte Welten wie die Minkowski - Welt, der Hilbert - Raum etc.

In der Regel sind im Kleinen sowohl rechte Winkel als auch ebene Bereiche möglich „ die Welt ist flach“ und der Abstand zweier Punkte kann durch Pythagoras

$$8.3: a^2 + b^2 = c^2 \ \textit{für ein Längenelement } ds: (ds)^2 = (dx_1)^2 + ... = \sum_{i=1}^{i=4} (dx_i)^2$$

ausgedrückt werden. Die Addition (= Integration für ds gegen 0) ergibt auch in einer mehrdimensionalen euklidischen Welt Abstände von Punkten.

Werden die Koordinaten jedoch krummlinig, so ist ebenfalls ein Abstand angebbar, es handelt sich dann mathematisch gesprochen, um die Differentialgeometrie, die von Gauss, Riemann, Ricci, Christoffel, etc. begründet wurde, jedoch müssen bei (8.3) Korrekturen vorgenommen werden:

$$8.4: a^2 + b^2 = g_{mn} \cdot c^2 \ \textit{für ein Riemannsches Längenelement } ds: (ds)^2 = g_{mn} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (dx_i)^2$$

Die Fundamente neben der Differentialgeometrie ist die physikalische Tatsache, daß im Vakuum alle Massen gleich schnell fallen: träge und schwere Masse sind gleich = **Äquivalenzprinzip**, und es gilt Eötvös, Ungarn):

$$8.5: \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^3} \cdot \gamma \cdot m \cdot M \cdot \mathbf{r}; \quad \gamma = \textit{Newtonsche Gravitationskonstante.}$$

9. Die Einsteinschen Feldgleichungen und Beispiele

Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie müssen die klassischen Gleichungen als Näherungen folgen, insbesondere muß sie den Energie- und Impulserhaltungssätzen genügen.
Die Gleichheit von schwerer und träger Masse werden u. a. durch folgende Experimente verdeutlicht:

Das Kastenexperiment: In einem kleinen geschlossenen Kasten kann für kurze Zeiträume ein Beobachter durch keinerlei Experiment entscheiden, ob er sich in einem Gravitationsfeld befindet, oder ob er im gravitationsfreien Feld beschleunigt wird; (bzw. ob er frei fällt oder ohne Gravitation im massefreien Raum ist);

Das Scheiben-Rotationsexperiment: Der Rand einer Scheibe bewege sich mit der Lichtgeschwindigkeit c. Ein Beobachter im Zentrum der Scheibe und auf dem Rand messen wegen der unterschiedlichen Lorentz - Längenkontraktion (4.4) unterschiedliche Scheibenumfänge

Ein Probekörper mit unendlich kleiner Masse bewegt sich in der Riemann - Geometrie auf einer geodätischen Linie: dies entspricht seiner Bewegungsgleichung.

Die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation, ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen (d. h.: eine Superposition ist nicht möglich) lauten:

$$9.1: R_{mn} - \frac{1}{2} \cdot g_{mn} \cdot R = \kappa \cdot T_{mn}; R_{mn} = Riccitensor; g_{mn} = Gravitationsfeldtensor;$$

$$R = Krümmungsskalar = verjüngter\ Riccitensor; \kappa = Einsteinsche\ Gravitationskons\tan te =$$

$$veral\lg emeinerte\ Newtonsche\ Gravitationskons\tan te; T_{mn} = Energieimpulstensor.$$

Das Allgemeine Relativitätsprinzip in Worten: Die Gesetze = Theorien der Physik besitzen für Beobachter, die sich in beliebigen Bewegungszuständen befinden, in beliebigen, auseinander hervorgehenden Koordinatensystemen stets dieselbe Form.

Die Mathematik ist ordentlich anspruchsvoll und es gibt nur wenige exakte Lösungen, eine Auswahl:

Schwarzschild - Lösung, 1916: Entspricht dem Gravitationsfeld einer statischen Kugel im Außen- wie im Innenraum mit konstanter Massendichte und führt zu den Schwarzen Löchern;

Friedman - Lösung, 1922: Ergibt ein homogenes und isotropes Weltmodell für eine Expansions- wie für eine Kontraktionsphase;

Kerr - Lösung, 1963: Wie die Schwarzschildlösung mit Masse M und Drehimpuls **D.** Es gibt allerdings keine Lösung für das Kugelinnere.

Kerr - Newman - Lösung, 1965: Berechnet das Gravitationsfeld im Außenraum eines rotierenden Körpers der Masse M, des Drehimpulses **D** und der Gesamtladung Q.

Ein Experiment beschreibt die Zeitdilatation im Flugzeug (Hafele - Keating - Experiment vom Oktober 1971.):

In den U.S.A., Washington, D.C., werden fünf „Atomuhren" = Cäsium - Atom - Uhren synchronisiert, je zwei davon werden in zwei Flugzeuge aufgestellt und eine Uhr bleibt am Ort stehen, je ein Flugzeug fliegt in Ost- und Westrichtung einmal um die Erde, nach der Landung ergeben sich die Zeitdifferenzen in Nanosekunden (= 10^{-9} s), korrigiert auf den Flugweg, zu:

Flugrichtung	*Experiment*	*Grav.Theorie*	*Geschw.Theorie*	*Gesamttheorie*
West	273 ± 7	179 ± 18	96 ± 10	275 ± 21
Ost	-59 ± 10	144 ± 14	-184 ± 18	-40 ± 23

Neben dem genauen Flugweg ist dabei noch die Rotationsgeschwindigkeit der Erde zu berücksichtigen, ein Flugzeug hat die gleiche, das andere die entgegengesetzte Flugrichtung.

Zur Berechnung muß die allgemeine und die spezielle Relativitätstheorie herangezogen werden:

Spezielle Relativitätstheorie:

Zu berechnen ist die Eigenzeit der Uhren nach (4.5):

$$9.2: \tau = \gamma \cdot t \Rightarrow \frac{\tau}{t} \approx 1 + \frac{u^2}{2 \cdot c^2} + ... = \begin{cases} 1 + 3{,}5 \cdot 10^{-10} & \textit{für Satelliten;} \\ 1 + 0{,}5 \cdot 10^{-12} & \textit{für Flugzeuge.} \end{cases}$$

wobei die Geschwindigkeit von Satelliten etwa 8.000 m/s und von Flugzeugen etwa 300 m/s angenommen wird.

Allgemeine Relativitätstheorie = Schwarzschild - Lösung:

Für den Außenraum kann das Linienelement als Schwarzschildlösung aus (9.1) berechnet werden:

$$9.3: (ds)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + r^2 \cdot \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta \cdot (d\vartheta)^2 \right] - \left(1 - \frac{r_G}{r} \right) \cdot c^2 \cdot (dt)^2$$

in den üblichen problemangepaßten Kugelkoordinaten. Dabei ist noch gegeben:

$$r_G = \frac{\kappa \cdot M \cdot c^2}{4\pi} = \textit{Schwarzschildradius} = \begin{cases} r_G^{Sonne} = 2{,}9\ km; \\ r_G^{Erde} = 0{,}9\ cm. \end{cases}$$

Seien die Koordinaten der Erdkugel konstant gewählt, dann wird (9.3) zu

$$9.4: (ds)^2 = -c^2 \cdot (d\tau)^2 \ \textit{und mit } r_G^{Erde} = 0{,}9\ cm, \textit{ sowie } r^{Erde} = 6{,}37 \cdot 10^8\ cm \Rightarrow$$

$$9.5: (d\tau)^2 = \left(1 - \frac{r_G}{r} \right) \cdot (dt)^2 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_G}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_G}{r} \right)}} \approx 1 + \frac{r_G}{r}$$

Der Zahlenwert für (9.5) ist damit:

$$\frac{dt}{d\tau} =\approx 1 + 7{,}1 \cdot 10^{-10}.$$

Modern Physics 1.3.: Radioaktives Material im Labor sendet zwei Elektronen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus: v1=0,6 c und v2=0,7 c, gemessen vom Laborbeobachter. Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit, klassisch und Lorentz-transformiert, wenn ein Beobachter sich auf einem Elektron befindet?

Modern Physics 3.5.: Ein Beobachter in 0 sieht zwei Ereignisse, getrennt im Raum durch 600 m und in der Zeit durch 8 10(-7)sec. Wie schnell muß ein Beobachter in O´sein, damit für die beiden Ereignisse Gleichzeitigkeit herrscht?

Physics 37.51.: Berechnen Sie Masse und Geschwindigkeit eines Elektrons mit der kinematischen Energie E(k)= 100 keV.(=Rasterelektronenmikroskop)

Physics.: Zeigen Sie, daß die Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens der Energie E und des Impulses **p** gegeben sind durch

$$v_x = \frac{\partial E}{\partial p_x}; v_y = \frac{\partial E}{\partial p_y}; und\ v_z = \frac{\partial E}{\partial p_z}.$$

(Diese Relation gilt für die Einstein-Minkowski- wie für die Newton-Mechanik.)

Physics 37.13.: Ein Strahl radioaktiver Teilchen wird durch das Labor fliegend gemessen. Jedes Teilchen lebt 20 nsec, bevor es zerfällt. In einem ruhenden laborsystem lebt das gleiche teilchen 7,5 nsec; wie schnell fliegt das Teilchen?

Modern Physics 8.23.: Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit vmax eines Teilchens, so daß die kinetische Energie Ekin geschrieben werden kann als 0,5 m0v2 mit einem fehler kleiner als 0,5 % ?

Modern Physics 8.29.: Um wieviel nimmt die Masse von 100 kg Kupfer zu, wenn die temperatur des Cu um 100 C steigt mit c=93 cal/kg C ?

Modern Physics 8.9.: Die Restmasse eines Mü-Mesons ist 207 mo Elektron mit der mittleren Lebensdauer von 2 10(-6) sec. Wie groß ist dessen Masse bei einer mittleren Laborlebensdauer von 7 10(-6) sec?